

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang  
Sidang Akademik 1997/98

April 1998

MAT 102 - Kalkulus Lanjutan

Masa: [3 jam]

---

**ARAHAN KEPADA CALON:**

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam EMPAT halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab mana-mana TIGA (3) soalan sahaja. Jika lebih daripada tiga soalan dijawab, hanya tiga soalan pertama akan diambil kira.

1.(a) Diberi  $u = e^{2x+y} \cos(2y-x)$  dengan  $x = 2s^2 - t^2$  dan  $y = s^2 + 2t^2$ .

Cari  $\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_t$  dan  $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_s$ . Ringkaskan jawapan anda.

(b) Tentukan sama ada siri berikut menumpu atau mencapah. Jika ia menumpu, cari nilainya.

(i)  $\sum_{j=1}^{\infty} -\left(\frac{-2}{e}\right)^j$       (ii)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+4)(k+5)}$       (iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{-2}{3}\right)^n \right]^2$

(c) Dalam Fizik, persamaan  $\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ ,  $c$  pemalar, digunakan untuk menerangkan pengaliran haba dalam suatu rod yang tertebat (*insulated rod*). Adakah  $T(x, t) = t^{-1/2} e^{-x^2/(4c^2t)}$  memenuhi persamaan haba itu? Terangkan jawapan anda.

(d) Satu tin jus minuman berbentuk silinder adalah berketinggian 12 sm dan berjajari 3 sm. Seorang pembekal bercadang untuk mengurangkan ketinggian tin tersebut sebanyak 0.02 sm dan jejari sebanyak 0.03 sm. Gunakan pembeza seluruh untuk menganggarkan kekurangan dalam isipadu jus bagi setiap tin jika cadangan itu diluluskan. Apakah perubahan sebenar isipadu tersebut?

...2/-

- (e) Gunakan gantian pembolehubah  $x = ar \cos \theta$ ,  $y = br \sin \theta$  untuk menilaikan

$$\iint_S \exp\left(\frac{-x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dydx,$$

di sini  $S$  ialah suku elips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

(100 markah)

- 2.(a) Cari jejari dan selang penumpuan bagi siri

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+7} (2x)^k.$$

- (b) Tentukan sama ada kamiran tak wajar berikut menumpu atau mencapah. Tunjukkan semua jalan kerja.

(i)  $\int_1^{\infty} \frac{x^{\sqrt{5}} + 1}{x^{3.33}} dx$

(ii)  $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1 - \cos x} dx$

- (c) Cari had jujukan berikut, jika wujud.

(i)  $\text{had}_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{7\sqrt{n} + 4\sqrt[4]{n}}$

(ii)  $\text{had}_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n}$

(iii)  $\text{had}_{n \rightarrow \infty} (1 + (-1)^n)$

- (d) Katakan  $f$  ditakrifkan seperti berikut:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Adakah  $f$  selanjur pada  $(0, 0)$ ? Jelaskan jawapan anda.

- (e) Diberi  $F(x, y, z) = 0$ . Buktikan bahawa

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = -1.$$

(100 markah)

- 3.(a) (i) Cari  $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$  jika  $z^2 + 3xyz + \sin(y^5 z) = 9$ .
- (ii) Biarkan  $F(x, y, z) = x^3 y + y^3 z + z^3 x$ . Cari fungsi  $G$  yang memenuhi  $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = x^3 + y^3 + z^3 + 3G(x, y, z)$ .
- (b) (i) Diberi  $e^x w + e^y v - wv = 1$   
 $yw + xv + \cos 2y = 3$ . Cari  $\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_x$ .

- (ii) Tunjukkan bahawa jika

$$y = x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \cdots x_m^{n_m}, \text{ maka}$$

$$\frac{dy}{y} = n_1 \frac{dx_1}{x_1} + n_2 \frac{dx_2}{x_2} + \cdots + n_m \frac{dx_m}{x_m}.$$

- (c) Guna koordinat kutub bagi menilaikan kamiran berganda  $\iint_D (x^2 + y^2) dA$ .

Di sini  $D$  ialah rantau yang dibatasi oleh paksi- $x$ , garislurus  $y = x$  dan lengkungan  $x^2 + y^2 = 1$ . Lakarkan rantau  $D$ .

- (d) Buktikan bahawa  $\frac{d^2 z}{d\theta^2} = y^2 f_{xx} + x^2 f_{yy} - 2xy f_{xy} - x f_x - y f_y$  jika  $z = f(x, y)$  dengan  $x = \cos \theta$ ,  $y = \sin \theta$ .
- (e) Cari hasil darab terbesar bagi tiga nombor nyata  $x$ ,  $y$  dan  $z$ , yang mana hasil tambah nombor-nombor ini mestilah berjumlah 24.

(100 markah)

- 4.(a) Uji penumpuan siri-siri berikut dengan menggunakan ujian yang bersesuaian.

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$

(ii)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{(k^3 + 1)^2}$

- (b) Biarkan  $w = f(t)$  merupakan fungsi terbezakan dalam  $t$ , di mana  $t = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ .  
 Tunjukkan bahawa

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2.$$

...4/-

- (c) Fungsi Bessel peringkat sifar  $J_0(x)$ , boleh ditakrifkan sebagai

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta.$$

Dengan menggunakan kembangan asas bagi fungsi kos  $y$ , tunjukkan bahawa  $J_0(x)$  mempunyai perwakilan siri Maclaurin

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \text{ untuk semua } x.$$

- (d) Dengan menggunakan koordinat silinder, cari isipadu  $S$  yang merupakan bungkah yang dijanakan hasil daripada tindanan sfera pejal  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$  dengan silinder pejal  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Lakarkan bungkah  $S$ .
- (e) Lakarkan rantau kamiran berikut dan seterusnya nilaikannya
- (i) dengan tertib yang diberikan
  - (ii) dengan tertib  $dydx$

$$\int_0^3 \int_{y/3}^{\sqrt{4-y}} dx dy$$

(100 markah)

-ooo0ooo-