

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1987/88

MAT420 - Persamaan Pembezaan Separa

Tarikh: 9 April 1988

Masa: 9.00 pagi - 12.00 tengahari
(3 jam)

Jawab SEMUA soalan. Semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. Jika nilai $u(x, y)$ di atas satu lengkung dalam satah x - y diketahui, melalui pertimbangan

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad \frac{du}{dt} = R(x, y, u),$$

terangkan secara ringkas bagaimana mencari penyelesaian

$$P(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = R(x, y, u).$$

Cari penyelesaian

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 2xu$$

tertakluk kepada $x = y = u = t$.

(100/100)

2. Kelaskan persamaan

$$6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \dots (i)$$

serta cari bentuk kanoniknya. Carikan penyelesaian amnya. Jika Pr.(i) dikenakan syarat $u(x, 0) = f(x)$ dan $u_y(x, 0) = g(x)$, carikan penyelesaiannya.

(100/100)

.../2

3. Selesaikan persamaan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \dots (i)$$

dalam rantau R yang diberi oleh $0 \leq x \leq \alpha$, $0 \leq y \leq \beta$ melalui kaedah pemisahan pembolehubah, tertakluk kepada

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, \beta) = 0, \quad u(0, y) = f(y) \text{ dan } u(\alpha, y) = 0.$$

Jika $\alpha = \beta = \pi$ dan $f(y) = y$, cari penyelesaian (i) tertakluk kepada syarat baru ini.

(100/100)

4. Biarkan $f(x)$ selanjar dan licin cebis demi cebis. Biarkan juga bahawa fungsi ini boleh dikamirkan secara mutlak. Jika kita takrifkan

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ipt} dt$$

dan

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{-ipt} dp,$$

tunjukkan bahawa Transformasi Fourier untuk

(i) $f'(t)$ iaitu $\text{IF}\{f'(t)\}$ diberi oleh $\text{IF}\{f'(t)\} = -i\alpha \text{IF}\{f(t)\}$,

(ii) $f * g$ diberi oleh $\text{IF}\{f * g\} = F(p)G(p)$,

dengan $f * g$ ditakrifkan sebagai

$$(f * g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \xi) g(\xi) d\xi,$$

dan $F(p)$, $G(p)$ masing-masing sebagai Transformasi Fourier untuk f , g . Selesaikan

$$w_t = w_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

melalui penggunaan Transformasi Fourier dengan syarat $w(x, 0) = h(x)$ dan $w(x, t)$ terbatas.

Anda dibenarkan menggunakan keputusan

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2 t - ipx} dp = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-x^2/4t}.$$

(100/100)

5. Dengan menganggap $u(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ dan $v(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, perturunkan persamaan

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots\dots (i)$$

kepada satu yang melibatkan ψ dan terbitan-terbitannya serta x, y .
Di sini v adalah pemalar.
Jika

$$\psi(x, y) = 6vx^{1/3}f(\eta), \quad \eta = yx^{-2/3},$$

dapatkan persamaan

$$f''' + 2ff'' + 2(f')^2 = 0. \dots\dots (ii)$$

Jika syarat yang diberikan terhadap (ii) ialah

$$f'(\eta) \rightarrow 0 \text{ apabila } \eta \rightarrow \pm\infty$$

dan

$$f'(\eta) = f'(-\eta),$$

tunjukkan bahawa

$$f(\eta) = \alpha \tanh \alpha \eta.$$

α adalah pemalar.

(100/100)

- ooo00ooo -