

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua  
Sidang 1993/94

April 1994

**MAT 420 - Persamaan Pembezaan Separa**

[Masa: 3 Jam]

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Cari bentuk berkanun bagi persamaan-persamaan berikut:

(i)  $3u_{xx} + 8u_{xy} + 4u_{yy} = 0$

(ii)  $u_{xx} + (1+y)^2 u_{yy} = 0$

(40/100)

(b) Cari siri Fourier bagi fungsi

$$f(x) = x + 1, \quad -1 < x < 1$$

(30/100)

(c) Cari jelmaan Fourier bagi fungsi

$$f(x) = e^{-ax^2}$$

Di sini  $a$  ialah pemalar positif.

(30/100)

2. (a) Tunjukkan bahawa penyelesaian bagi masalah:

$$u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$$

$$u_t(x,0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty$$

boleh ditulis dalam bentuk:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau$$

(40/100)

(b) Selesaikan:

$$\nabla^2 u = 0 \quad , \quad 0 \leq r < 1 \quad , \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$u(1, \theta) = |\theta| \quad , \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$\text{Di sini } \nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} .$$

(30/100)

(c) Katakan  $u(x,y)$  memenuhi persamaan  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  di dalam suatu domain  $\Omega$  dan selanjutnya pada  $\bar{\Omega}$ . Buktikan bahawa  $u$  mencapai nilai maksimumnya pada  $\Gamma$  di mana  $\Gamma$  ialah sempadan bagi  $\Omega$ .

(30/100)

3. Selesaikan masalah berikut:

$$u_t = k u_{xx} + h \quad , \quad 0 < x < \pi \quad , \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x \quad , \quad 0 < x < \pi$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

Di sini  $k$  dan  $h$  ialah pemalar positif.

(100/100)

4. (a) Cari fungsi Green bagi masalah berikut:

$$u_{xx} + u_{yy} = h(x, y) \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad y > 0$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

dan selesaikan masalah ini.

Jika  $h(x, y) = 0$ , tunjukkan bahawa penyelesaiannya boleh ditulis dalam bentuk:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x - y \tan \theta) d\theta \quad , \quad y > 0$$

(60/100)

- 3 -

- (b) Katakan  $\Omega = \{ (x,y) : 0 < x < a, 0 < y < b \}$

Cari fungsi Green bagi masalah berikut:

$$u_{xx} + u_{yy} - u = h(x,y) \quad \text{di dalam } \Omega$$

$$u(x,y) = f(x,y) \quad \text{pada sempadan bagi } \Omega.$$

(40/100)

5. Selesaikan masalah-masalah berikut:

(a)  $u_t = ku_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$

$$u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$$

(30/100)

(b)  $v_t = kv_{xx} + h(x,t), \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0$

$$v(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \ell$$

$$v(0,t) = v(\ell,t) = 0, \quad t > 0$$

(30/100)

(c)  $u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{\cot\theta}{r^2}u_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\phi\phi} = 0$

$$0 \leq r < a, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \phi < 2\pi$$

$$u(a, \theta, \phi) = A \sin^2\theta, \quad A = \text{pemalar}$$

(40/100)

- ooo00ooo -