UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1987/88

MAT413 - Aljabar Moden II

Tarikh: 16 April 1988

Masa: 9.00 pagi - 12.00 t/hari
(3 Jam)

Jawab EMPAT soalan; soalan 1 adalah wajib. Semua soalan mesti dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1. (A) Bagi setiap soalan berikut, pilih jawapan yang betul. Kalau tidak ada jawapan betul, pilihlah X. Tuliskan pilihan anda di dalam buku jawapan.

(72/100)

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \tilde{0} \Rightarrow$ dimensi ruang penyelesaian ialah:

(a) 0, (b) 1, (c) 3, (d) 5, (e) takterhingga banyak, (f) X.

(ii) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ b & c \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ dan

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -x & z \end{pmatrix} \middle| \ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$. Maka dimensi $(U + W)$ ialah:

(a) 0, (b) 1, (c) 2, (d) 3, (e) 4, (f) X.

(iii) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a + b + 2c \\ 2a - b + c \\ 3b + 3c \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ dan

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ y + z \\ -x + 3y + 2z \end{pmatrix} \middle| \ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \in \mathbb{R} \right\}$. Maka $\dim(U + W)$ ialah:

(a) 0, (b) 1, (c) 2, (d) 3, (e) 4, (f) X.

.../2

(iv) Fungsi berikut yang bukan transformasi linear ialah:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sedemikian $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$.

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sedemikian $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(c) $T : \mathbb{C} \to M_{2\times2}$ sedemikian $T(a + bi) = \begin{pmatrix} a + 7b & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

(d) $T : M_{m\times n} \to M_{n\times m}$ sedemikian $T(A) = A^T$.

(e) $T : M_{2\times2} \to M_{2\times2}$ sedemikian $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & d+c \end{pmatrix}$.

(f) X .

(v) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sedemikian $T(X) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} X$. Maka $\dim(R_T)$ ialah:

(a) 0, (b) 1, (c) 2, (d) 3, (e) 4, (f) X.

(vi) $T : M_{2\times2} \to M_{2\times3}$ sedemikian $T(A) = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Maka $\dim(N_T)$ ialah:

(a) 0, (b) 1, (c) 2, (d) 3, (e) 4, (f) X .

(vii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ni T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x-y \\ x+y+z \end{pmatrix}$. Maka:

(a) T adalah 1-1, (b) T adalah menyeluruh,
(c) $N_T = \{\tilde{0}\}$, (d) $d(R_T) = 1$, (e) $d(N_T) = 2$, (f) X.

(viii) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ dan $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ adalah asas tertib masing-masing bagi $M_{2\times2}$ dan $\mathbb{R}^2$.

$T : M_{2\times2} \to \mathbb{R}^2$ adalah transformasi $\ni T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ c + d \end{pmatrix}$.

Maka:

(a) $T = T_{11} + T_{12} + T_{32} + T_{24}$,

(b) $T = T_{11} + T_{21} + T_{32} + T_{42}$,

(c) $T = T_{12} + T_{22} + T_{31} + T_{41}$,

(d) $T = T_{11} + T_{12} + T_{13} + T_{14}$,

(e) $T = T_{12} + T_{34} + T_{56} + T_{78}$, (f) X .

(ix) $T : V \to W$ adalah suatu transformasi linear. Apabila $T(T(v)) = \tilde{0}$, $v \in V$, maka $T(v) = \tilde{0}$. Maka:

(a) $d(R_T \cap N_T) = 0$, (b) $d(R_T) = 0$, (c) $d(N_T) = 0$,
(d) $R_T + N_T = V$, (e) $R_T + N_T = \{\tilde{0}\}$, (f) X .

(x) $W = \left\{\begin{pmatrix} x+z & -x+y & x+2y+3z \\ 3y+3z & x+z & 2x+y+3z \end{pmatrix} \middle| \ x, y, z \in \mathbb{R}\right\} \subset M_{2\times 3}$.

Maka $\dim[A(W)]$ ialah:

(a) 0, (b) 1, (c) 2, (d) 3, (e) 4, (f) X .

(xi) $T : V \to V$ adalah satu isomorfisma. C dan D adalah asas tertib bagi V. Maka:

(a) $[T]_C$ dan $[T]_D$ adalah serupa.

(b) $[T]_{CD}$ dan $[T]_C$ adalah serupa.

(c) $[T]_C[T]_D = [T]_D[T]_C$.

(d) $[T]_{CD}$ dan $[T]_{DC}$ adalah serupa.

(e) $[T]_C = [T]_D$.

(f) X .

(xii) $T : V \to W$ adalah suatu transformasi linear dan $d(R_T) = d(N_T)$. $A = \{X_1, \ldots, X_n\} \subset V$ dan $B = \{T(X_1), \ldots, T(X_n)\}$. Maka:

(a) $d(V) = n$.

(b) T adalah suatu isomorfisma.

(c) A adalah suatu asas bagi V bermakna B adalah suatu asas bagi W.

.../4

(d) n adalah ganjil.

(e) n adalah genap.

(f) X.

(B) $T \in Hom(V, V)$ dan $T^2 = T$. Takrifkan $V_1 = \{v \mid T(v) = v\}$.
Buktikan:

$$V = N_T + V_1, \quad N_T \cap V_1 = \{\tilde{0}\}.$$

(14/100)

(C) $T : V \to V$ adalah suatu transformasi linear sedemikian $d(R_T) = d(R_{T^2})$. Buktikan $R_T \cap N_T = \{\tilde{0}\}$.

(14/100)

2. (a) $T : V \to W$ adalah suatu transformasi linear. Buktikan:

$$d(V) = d(R_T) + d(N_T).$$

(50/100)

(b) $T : M_{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ sedemikian $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+d \\ b+d \\ a+c \end{pmatrix}$. Tentusahkan (a).

(20/100)

(c) W adalah suatu subruang bagi ruang V. Jika $f \in \hat{V}$, takrifkan $\tilde{f} : W \to \mathbb{R}$ sebagai $\tilde{f}(w) = f(w)$. Nyatalah $\tilde{f} \in W$. Takrifkan $T : \hat{V} \to \hat{W}$ oleh $T(f) = \hat{f}$. Buktikan:

(i) T adalah suatu transformasi linear.

(ii) T adalah menyeluruh.

(iii) $N_T = A(W)$.

(iv) $d(V) = d[A(W)] + d(W)$.

(30/100)

.../5

3. (a) Kalau U dan W adalah subruang bagi V, buktikan
$d(U) + d(W) = d(U + W) + d(U \cap W)$.

(40/100)

(b) Diberi $U = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ dan
$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2x & -2x+y \\ y & 4x \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$ adalah subruang bagi $M_{2\times 2}$.
Tentusahkan (a).

(30/100)

(c) Katakan $U = \{A \mid A \in M_{3\times 3}, A^T = A\}$ dan $W = \{A \mid A \in M_{3\times 3}, A^T = -A\}$.
Cari $d(U)$, $d(W)$, $d(U + W)$ dan $d(U \cap W)$.

(15/100)

(d) Diberi A adalah matriks $m\times n$ dan pangkat $A = r$. Buktikan dimensi ruang penyelesaian daripada $AX = \tilde{0}$ ialah $n-r$.

(15/100)

4. (a) $T : V \to V$ adalah suatu transformasi linear dengan asas tertib C dan D. Katakan P adalah matriks peralihan daripada C ke D.
Buktikan $[T]_C = P^{-1}[T]_D P$.

(40/100)

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ adalah transformasi linear sedemikian
$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \end{pmatrix}$ dengan asas tertib $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ dan
$D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Tentusahkan $[T]_C = P^{-1}[T]_D P$.

(30/100)

(c) $S, T \in \mathrm{Hom}(V, V)$ dan C adalah suatu asas tertib bagi V.
Buktikan $[ST]_C = [S]_C[T]_C$.

(20/100)

(d) U dan W adalah subruang bagi V. Buktikan $A(U + W) = A(U) \cap A(W)$ yang mana $A(U)$ adalah pemusnah-habis bagi U.

(10/100)

5. (a) $S = \left\{ x\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\2\\3\end{pmatrix} \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$. Dapatkan suatu asas ortonormal bagi S.

(30/100)

(b) Kalau $W = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\0 & -1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix} X = \tilde{0} \right\}$ dan $U = \{X \mid X.w = 0,\ w \in W\}$, cari $d(U + W)$ dan $d(U \cap W)$.

(20/100)

(c) Diberi $v, w \in \mathbb{R}^n$. Buktikan $|v.w| \leqslant |v||w|$.

(25/100)

(d) $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ adalah ortonormal set daripada $\mathbb{R}^n$ dan $\beta \in \mathbb{R}^n$. Buktikan

$$\sum_{k=1}^{m} |\beta.\alpha_k|^2 \leqslant |\beta|^2.$$

Tambahan pula, ini adalah sama jika dan hanya jika

$$\beta = \sum_{k=1}^{m} (\beta.\alpha_k)\alpha_k .$$

(25/100)

- oooOOooo -