UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1987/88

MAT368 - Proses Stokastik Gunaan

Tarikh: 5 April 1988

Masa: 9.00 pagi - 12.00 tengahari
(3 jam)

Jawab KELIMA-LIMA soalan; semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Bilangan N, kemalangan yang berlaku di dalam sebuah kilang di dalam seminggu adalah suatu pembolehubah rawak dengan min μ dan varians σ^2. X,bilangan individu yang cedera di dalam kemalangan yang berlainan adalah pembolehubah-pembolehubah rawak yang tak bersandar setiap dengan min ν dan varians τ^2.
Katakan Y adalah jumlah bilangan individu yang cedera.

(i) Tunjukkan untuk sebarang $\alpha \in R$

$$E(e^{-\alpha Y}) = G(F(\alpha))$$

disini $F(\alpha) = E(e^{-\alpha X_n})$, $G(\beta) = E(\beta^n)$ $\alpha \in R$, $\beta \in [0,1]$.

(ii) Daripada (i) dapatkan jangkaan dan varians bagi Y.

(40/100)

(b) Suatu jujukan cubaan Bernoulli yang berulang dan tak bersandar dijalankan. Setiap cubaan menghasilkan kejayaan dengan kebarangkalian p. Katakan S_r adalah masa menunggu kepada kejayaan yang ke r. Tunjukkan bahawa bilangan cubaan yang dijangka untuk mendapatkan r kejayaan diberikan oleh r/p, untuk sebarang integer r = 1,2,...

(60/100)

2. (a) Pertimbangkan suatu rantai Markov dengan ruang keadaan {0,1,2,3,4,5} dan matriks peralihan:

.../2

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Tunjukkan bahawa rantai Markov tersebut adalah tak terturunkan dan jadi semula tak nol.

(ii) Carikan kalaan.

(iii) Apakah kelakuan had p^n bila $n \to \infty$.

(50/100)

(b) Katakan $\{X_n\}$ adalah suatu rantai Markov dengan ruang keadaan $\{1,2,3,\ldots\}$ dan matriks peralihan:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

(i) Tentukan kelas-kelas berkomunikasi bagi rantai ini.

(ii) Cari taburan masa panjang jika ianya wujud.

(50/100)

3. (a) Bagi matriks-matriks peralihan yang diberikan, gunakan kriterium Aitken untuk menentukan sama ada matriks P^n, mempunyai had apabila $n \to \infty$:

.../3

(i)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

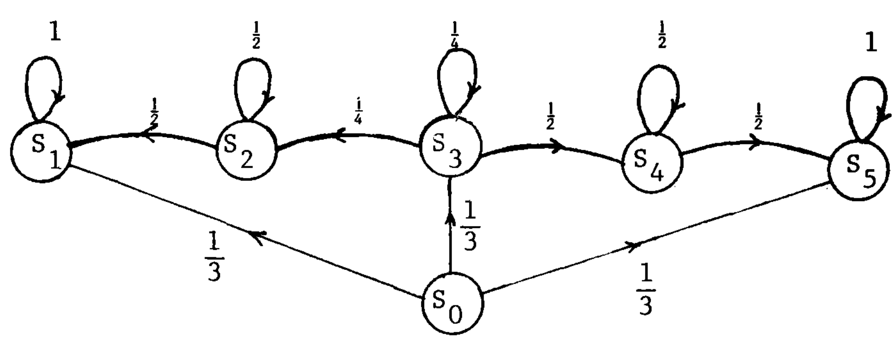
(ii)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Jika P^n mempunyai had, carikan had P^n apabila $n \to \infty$.

(40/100)

(b) Untuk gambarajah peralihan rantai Markov ini, jawab soalan-soalan yang di bawah:



Diberikan bahawa sistem ini berada di dalam keadaan S_0 sebelum langkah yang pertama, tentukan kebarangkalian:

(i) Sistem masuk S_2 buat pertama kalinya pada langkah yang ke k.

(ii) Sistem tidak akan masuk S_4.

(iii) Sistem masuk S_2 dan keluar daripada S_2 pada langkah yang dimasukinya.

.../4

(iv) Sistem masuk S_1 buat pertama kalinya pada langkah ketiga.

(v) Sistem berada di dalam keadaan S_3 sejurus selepas langkah ke N.

(30/100)

(c) Di dalam sebuah universiti 65% pelajar tahun pertama maju ke tahun kedua, 80% pelajar tahun kedua maju ke tahun ketiga, 92% pelajar tahun ketiga maju ke tahun keempat dan 95% pelajar tahun akhir berjaya mendapat ijazah.

Diketahui bahawa peratusan pelajar yang gagal dan dikeluarkan (termasuk yang berpindah ke universiti lain) untuk setiap tahun adalah: tahun pertama 25%, tahun kedua 10%, tahun ketiga 3% dan tahun akhir 1%; pelajar-pelajar yang lain kekal pada tahun pengajian yang sama pada tahun berikutnya.

(i) Modelkan proses di atas sebagai satu rantai Markov dengan mengenalpasti ruang-ruang keadaannya.

(ii) Dapatkan matriks kebarangkalian peralihan dan kelaskan keadaan-keadaan bagi rantai Markov ini.

(30/100)

4. (a) Di dalam suatu proses bercabang bilangan anak bagi suatu individu mempunyai taburan binomial dengan parameter-parameter 2 dan p. Bermula dengan individu tunggal, kirakan:

(i) kebarangkalian kemusnahan.

(ii) kebarangkalian bahawa populasi akan musnah buat pertama kalinya di dalam generasi yang ketiga.

Andaikan sekarang, populasi saiz awal Z_0 adalah suatu pembolehubah rawak yang bertaburan Poisson dengan min λ Tunjukkan, di dalam kes ini, kebarangkalian kemusnahan yang diberikan untuk $p > \frac{1}{2}$ adalah

$$\exp\left\{\frac{\lambda(1-2p)}{p^2}\right\} .$$

(60/100)

.../5

(b) Katakan X mempunyai taburan binomial dengan parameter-parameter p dan N. Andaikan p adalah suatu pembolehubah rawak tertentu dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian berikut:

$$f(p) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \, p^{a-1} \, (1-p)^{b-1} & , \quad 0 < p < 1, \; a > 0, \; b > 0 \\ 0 & , \quad \text{selainnya.} \end{cases}$$

(i) Cari taburan bagi X.

(ii) Bilakah taburan ini seragam di atas $x = 0,1,\ldots, N$.

(40/100)

5. (a) Pertimbangkan suatu proses kelahiran tulen iaitu proses Yule. Jika proses ini bermula dengan individu tunggal, kita dapati saiz populasi pada masa t mempunyai taburan geometri dengan min $e^{\lambda t}$.

Andaikan proses ini bermula dengan i individu, dapatkan taburan bagi saiz populasi pada masa t.

(40/100)

(b) Katakan X(t) adalah suatu proses lahir-mati dengan

$$\lambda_n = \frac{\alpha}{n+1} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

untuk suatu $\alpha > 0$ dan

$$\mu_n = \mu > 0 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Anggapkan $X(0) = 1$.

(i) Carikan sistem persamaan pembezaan bagi $P_n(t) = P[X(t) = n]$.

(ii) Dapatkan persamaan pembezaan separa yang terlibat di dalam menyelesaikan masalah ini dan seterusnya beri jawapan bagi $P_n(t)$.

(60/100)

- oo0oo -