UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1987/88

MAT361 - Pentaabiran Statistik

Tarikh: 14 April 1988

Masa: 9.00 pagi - 12.00 t/hari
(3 Jam)

Jawab SEMUA soalan. Semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tertabur secara secaman dan tak bersandar dengan f.k.k.

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0, \quad \theta > 0 \\ 0, & \text{d.t.t.l.} \end{cases}$$

(i) Andaikan $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ menandakan X_i bertertib. Dapatkan f.k.k. tercantum bagi $X_{(1)}$, $X_{(2)}$ dan $X_{(3)}$.

(ii) Katakan $Y_1 = nX_{(1)}$, $Y_2 = (n-1)(X_{(2)}-X_{(1)})$ dan $Y_3 = (n-2)(X_{(3)}-X_{(2)})$. Tunjukkan bahawa Y_1, Y_2 dan Y_3 tertabur secara secaman dan tak bersandar.

(40/100)

(b) Andaikan X_1 dan X_2 merupakan dua pembolehubah rawak tak bersandar. Tunjukkan bahawa

$$\mathrm{Var}(X_1X_2) = \mathrm{Var}(X_1)\mathrm{Var}(X_2) + (E[X_1])^2\mathrm{Var}(X_2) + (E[X_2])^2\mathrm{Var}(X_1)\ .$$

(20/100)

.../2

(c) (i) Andaikan f(x) merupakan satu f.k.k. dengan min μ dan varians σ^2. dan andaikan $\bar{X}$ merupakan min sampel bagi satu sampel rawak bersaiz n daripada f(x). Jika n ialah sebarang integer supaya $n > \sigma^2/\varepsilon^2\delta$ dengan $\varepsilon > 0$ dan $0 < \delta < 1$, tunjukkan bahawa

$$P(-\varepsilon < \bar{X} - \mu < \varepsilon) \geq 1 - \delta .$$

$$\left[\text{Petunjuk:} \quad P(g(X) \geq k) \leq \frac{E[g(X)]}{k}\right].$$

(ii) Andaikan satu taburan dengan min μ mempunyai varians, $\sigma^2 = 1$. Dengan menggunakan keputusan di bahagian c(i) di atas, dapatkan saiz sampel n supaya kebarangkalian min sampel $\bar{X}$ berada di dalam jarak 0.5 daripada min populasi μ, adalah sekurang-kurangnya 0.95.

(40/100)

2. (a) Berikan takrif bagi statistik cukup. Dengan menggunakan takrif ini, tunjukkan bahawa statistik $T = X_1 - X_2$ bukan suatu statistik cukup sekiranya X_1 dan X_2 tertabur secara secaman dan tak bersandar dengan taburan Poisson (μ), iaitu

$$f(x;\ \mu) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}, \quad x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

(20/100)

(b) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sebagai suatu sampel rawak daripada taburan $N(\theta,\ 1)$, iaitu

$$f(x;\ \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}, \quad -\infty < x < \infty .$$

(i) Tunjukkan bahawa $\sum_{i=1}^{n} X_i$ merupakan satu statistik cukup dan lengkap bagi θ.

(ii) Terbitkan satu penganggar saksama bervarians minimum secara seragam (PSVMS) bagi θ. Kemudian terbitkan satu PSVMS bagi θ^2.

.../3

(iii) Tunjukkan bahawa varians bagi penganggar θ ini mencapai batas bawah Cramer-Rao.

(50/100)

(c) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sebagai suatu sampel rawak daripada satu taburan yang mempunyai min μ dan varians σ^2.

(i) Tunjukkan bahawa $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ merupakan satu penganggar saksama bagi μ dengan $a_1, \ldots, a_n$ merupakan pemalar yang memenuhi syarat $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

(ii) Jika $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, tunjukkan bahawa $\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)$ adalah minimum apabila $a_i = 1/n$, $i = 1, \ldots, n$.

[Petunjuk: Buktikan bahawa $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i - 1/n)^2 + 1/n$ apabila $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$].

(30/100)

3. Andaikan $X_1, \ldots, X_n$ sebagai satu sampel rawak daripada $f(x; \theta) = 1/\theta$, $0 \leq x \leq \theta$, $\theta > 0$. Takrifkan Y_n = maksimum $(X_1, \ldots, X_n)$ dan Y_1 = minimum $[X_1, \ldots, X_n]$.

(i) Anggarkan θ dengan menggunakan kaedah momen. Namakan penganggar ini T_1.

(ii) Dapatkan suatu penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ. Namakan penganggar ini T_2.

(iii) Dapatkan suatu penganggar saksama bervarians minimum secara seragam bagi θ. Namakan penganggar ini T_3.

.../4

(iv) Andaikan terdapat satu lagi penganggar iaitu $T_4 = Y_1 + Y_n$. Penganggar-penganggar manakah yang saksama dan yang mana pula konsisten?

(v) Penganggar manakah yang anda akan pilih untuk menganggar θ. Berikan alasannya.

(100/100)

4\. (a) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menandakan satu sampel rawak daripada taburan $N(0, \theta)$, iaitu

$$f(x;\ \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\, e^{-\frac{1}{2\theta}x_i^2}, \quad -\infty < x < \infty, \ \theta > 0 .$$

(i) Dapatkan satu rantau genting bersaiz α yang terbaik bagi menguji hipotesis $H_0 : \theta = \theta_1$ melawan $H_a : \theta = \theta_2$.

$$\left[\text{Petunjuk:}\quad \text{Jika } H_0 \text{ benar, } \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\theta_1} \sim \chi^2_{(n)} \ .\right]$$

(ii) Tunjukkan bahawa rantau genting yang diperolehi di dalam bahagian (i) di atas juga merupakan satu rantau genting paling berkuasa secara seragam bagi menguji hipotesis $H_0 : \theta = \theta_1$ melawan $H_a : \theta > \theta_1$.

(iii) Sekiranya aras keertian yang diingini ialah $\alpha = 0.05$ dan $n = 3$, dapatkan bentuk tepat rantau genting ini jika hipotesisnya ialah $H_0 : \theta = 3$ melawan $H_a : \theta > 3$.

(50/100)

(b) Andaikan X sebagai satu cerapan tunggal daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\ \theta) = \theta e^{-\theta x}, \quad 0 < x < \infty, \ \theta > 0.$$

(i) (X, 2X) merupakan satu selang keyakinan bagi $1/\theta$. Apakah pekali keyakinannya?

.../5

(ii) Tunjukkan bahawa $Y = e^{-\theta X}$ merupakan satu kuantiti pangsi. Dengan menggunakan kuantiti pangsi ini, dapatkan satu selang keyakinan 90% bagi $1/\theta$.

(30/100)

(c) Andaikan $\bar{X}$ merupakan min bagi satu sampel rawak bersaiz n daripada satu taburan $N(\mu, \sigma^2)$, dengan σ^2 diketahui. Diberikan bahawa $F(2) - F(-2) = 0.954$, dengan F merupakan satu fungsi taburan bagi pembolehubah rawak normal piawai, Z. Bagi setiap μ, dapatkan $C_1(\mu)$ dan $C_2(\mu)$ supaya $P(C_1(\mu) < \bar{X} < C_2(\mu)) = 0.954$. Dengan menggunakan kenyataan ini, dapatkan satu selang keyakinan 95.4% bagi μ.

(20/100)

5. (a) Andaikan $X_1, \ldots, X_n$ merupakan satu sampel rawak daripada taburan yang mempunyai f.k.k.

$$
\begin{aligned}
f(x; \theta) &= \theta^x (1-\theta)^{1-x} \quad , \quad x = 0, 1 \\
&= 0 \quad , \quad \text{d.t.t.l.}
\end{aligned}
$$

(i) Bagi satu sampel rawak bersaiz n = 10, uji $H_0 : \theta \leqslant \frac{1}{2}$ melawan $H_a : \theta > \frac{1}{2}$. Guna rantau genting

$$c = \{(x_1, \ldots, x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} x_i \geqslant 6\} .$$

(a) Dapatkan fungsi kuasa bagi ujian ini.

(b) Apakah saiz ujian ini, iaitu nilai α?

(ii) Bagi satu sampel rawak bersaiz n = 10,

(a) Dapatkan satu ujian paling berkuasa saiz-α ($\alpha = .0547$) bagi $H_0 : \theta = \frac{1}{2}$ melawan $H_a : \theta = \frac{1}{4}$.

(b) Dapatkan kuasa bagi ujian paling berkuasa ini pada $\theta = \frac{1}{4}$.

(50/100)

(b) Andaikan $X_1, \ldots, X_n$ merupakan satu sampel rawak daripada taburan $N(\theta, 1)$.

(i) Tunjukkan bahawa ujian nisbah kebolehjadian bagi menguji $H_0 : \theta = 1$ melawan $H_a : \theta \neq 1$ menetapkan rantau genting $C = \{(x_1, \ldots, x_n) : |\bar{x} - 1| \geq c\}$.

(ii) Adakah ujian ini merupakan satu ujian paling berkuasa secara seragam bagi H_0 melawan H_a?

(iii) Sekiranya sampel rawak tersebut bersaiz 25, tentukan nilai c supaya $\alpha = 0.05$.

(50/100)

- oooOOooo -