UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaaan Semester Pertama
Sidang 1993/94

Oktober/November 1993

MAT320 Persamaan Pembezaan II

Masa : [3 jam]

Jawab EMPAT (4) soalan sahaja.

1. (a) Berikan bentuk penyelesaian khusus

$y'' + 4y = f(x)$ jika
(i) $f(x) = x^2 e^{-3x} \sin x$,
(ii) $f(x) = x\sin 2x$.
Seterusnya, selesaikan persamaan

$$y'' + 4y = x^2 e^{-3x} \sin x - x\sin 2x .$$

(b) Dapatkan penyelesaian am persamaan

$$y'' + y = \tan x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

(c) Pertimbangkan masalah nilai awal

$$P_0(x)y^{(n)}(x) + P_1(x)y^{(n-1)}(x) + P_2(x)y^{(n-2)}(x) + \ldots\ldots\ldots\ldots + P_n(x)y(x) = g(x), \ x \in I,$$

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_1, \ldots\ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} .$$

Nyatakan syarat-syarat yang akan menjamin masalah ini mempunyai penyelesaian unik pada selang I.

(100/100)

2. (a) Tunjukkan bahawa persamaan

$3xy'' + 2y' + y = 0$ mempunyai titik singular nalar pada $x = 0$.
Seterusnya, selesaikan persamaan tersebut dengan menggunakan kaedah Frobenius.

...2/-

(b) Andaikan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Dapatkan $\exp(tA)$.
(ii) Selesaikan sistem homogen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

(c) Kirakan jelmaan Laplace fungsi $te^{\mu t}$.

(100/100)

3. (a)(i) Dengan menggunakan pertukaran $x = e^t$ atau $t = \ln x$, tunjukkan bahawa persamaan Euler

$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$ dengan $x > 0$ menjadi

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\alpha - 1)\frac{dy}{dt} + \beta y = 0 .$$

(ii) Selesaikan persamaan

$$x^2 y'' + xy' + 4y = \sin(\ln x)$$

berpandukan keputusan di bahagian (i) atau dengan menggunakan cara lain.

(b) Penyelesaian polinomial kepada persamaan Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

disebut polinomial Legendre, ditandakan sebagai P_n, yang juga memenuhi $P_n(1) = 1$. Tunjukkan bahawa

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0 \text{ jika } m \neq n.$$

...3/-

(c) Jika $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$,

tahkikkan bahawa

$$\frac{d}{dt}(A^2) = A\frac{dA}{dt} + \frac{dA}{dt}A \text{ dan } \frac{d}{dt}(A^2) \neq 2A\frac{dA}{dt}.$$

(100/100)

4. (a) Nyatakan syarat-syarat yang diperlukan supaya persamaan pembezaan

$$[p(x)y']' + q(x)y + \lambda r(x)y = 0$$

pada selang $a < x < b$ dengan syarat sempadan

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$$
$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

merupakan masalah Sturm - Liouville.

(b) Cari nilai dan fungsi eigen masalah nilai sempadan

$$(xy')' + \lambda\left(\frac{1}{x}\right)y = 0$$
$$y(1) = 0, y(e^{\pi}) = 0.$$

(c) Selesaikan masalah

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}$$

jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan

$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{t} \end{pmatrix}$ dengan

$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(100/100)

...4/-

5. Pertimbangkan persamaan haba

$\alpha^2 u_{xx} = u_t \,,\ 0 < x < a,\ t > 0$

dengan syarat sempadan

$u_x(0,t) = 0,\ u_x(a,t) = 0,\ t > 0$

dan syarat awal

$u(x,0) = f(x),\ 0 \le x \le a\,.$

(a) Tunjukkan bahawa persamaan ini mempunyai penyelesaian berbentuk

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{a}) \exp(\frac{-n^2\pi^2\alpha^2 t}{a^2})\,.$$

(b) Nyatakan rumus untuk a_0 dan a_n .
(c) Apakah $u(x,t)$ apabila $a = 1$ dan $u(x,0) = x$?

(100/100)

- oo0Oooo -