

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama  
Sidang Akademik 1998/99

Ogos/September 1998

MAT 263/MAT 362 - Teori Kebarangkalian

Masa: [3 jam]

**ARAHAN KEPADA CALON:**

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA soalan di dalam EMPAT halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Jawapannya mesti ditulis di dalam Bahasa Malaysia. Sifir *New Cambridge Statistical Tables* disediakan. Alat penghitung boleh digunakan, dan ia disediakan oleh pelajar sendiri.

- 1.(a) Katakan  $X$  ialah pembolehubah rawak yang fungsi taburan  $F(x)$ ,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0; \\ 1/16 & ; 0 \leq x < 1; \\ 5/16 & ; 1 \leq x < 2; \\ 11/16 & ; 2 \leq x < 3; \\ 15/16 & ; 3 \leq x < 4; \\ 1 & ; 4 \leq x; \end{cases}$$

Cari f.k.k. bagi pembolehubah rawak  $X$ .

(20 markah)

- (b) Katakan  $X$  ialah pembolehubah rawak dan

$$P(X > x) = 1 - \frac{x^3}{k}, \quad 0 < x < 2;$$

$k$  pemalar.

- (i) Cari nilai  $k$ .  
(ii) Cari min dan varians bagi  $X$  kalau ujud.

(30 markah)

- (c) Katakan  $(X, Y)$  ialah pembolehubah rawak yang f.k.k.nya diberi di dalam jadual:

	$Y$			
	$X$			

Cari

- (i) f.k.k. sut bagi  $X$ ;  
(ii) f.k.k. sut bagi  $Y$ ;

...2/-

- (iii) f.k.k. (bersyarat) bagi  $Y$  diberi  $X = 1$ ;  
 (iv)  $P(Y - X \leq 2)$ .

(50 markah)

- 2.(a) Diketahui  $X$  ialah pembolehubah rawak yang f.k.k.nya  $f(x)$ ,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

dan  $Y$  ialah pembolehubah rawak yang f.k.k.nya  $g(y)$ ,

$$g(y) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{18}y^2}, \quad -\infty < y < \infty,$$

dan  $X$  dan  $Y$  adalah tak bersandar. Cari  $P(X < Y + 1)$ .

(20 markah)

- (b) Nyatakan ketaksamaan Chebyshev. Jika  $X$  ialah pembolehubah rawak yang minnya  $E(X) = 8$  dan variansnya  $\sigma^2 = 9$ . Cari satu batas bawah bagi  $P(-4 < X < 20)$ .

(30 markah)

- (c) Katakan  $X_1, X_2$  ialah sampel rawak dari populasi yang f.k.k.nya  $f(x)$ ,

$$f(x) = e^{-x}; \quad x > 0$$

Takrifkan  $Z = X_1 + X_2$ ;

$$W = \frac{X_1}{X_1 + X_2};$$

- (i) dapatkan f.k.k. tercantum bagi  $(Z, W)$ .  
 (ii) dapatkan f.k.k. sut bagi  $Z$ .  
 (iii) Adakah  $Z$  dan  $W$  tak bersandar?

(50 markah)

- 3.(a) Sebiji dadu adil dilemparkan berturut-turut sehingga "permukaan 6-mata" muncul untuk kali yang pertama. Katakan  $X$  ialah bilangan lemparan yang diperlukan. Cari

- (i) f.k.k. bagi  $X$ .  
 (ii) fungsi penjana momen bagi  $X$ .

(20 markah)

- (b) Katakan  $X$  dan  $Y$  adalah pembolehubah rawak yang f.k.k. tercantumnya  $f(x, y)$ ,

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & ; 0 < x < 1; \quad 0 < y < 1; \\ 0 & ; \text{tempat - tempat lain;} \end{cases}$$

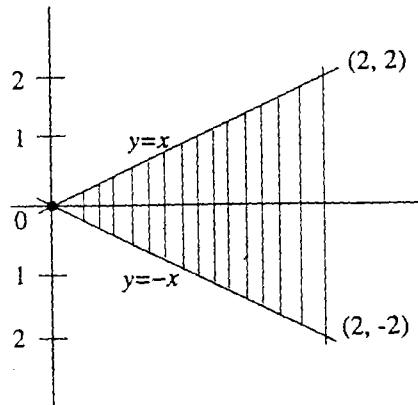
- Takrifkan  $W = X + Y$ ;  
 $V = X - Y$ ;

Cari pekali korelasi bagi  $W$  dan  $V$ .

(30 markah)

- (c) Katakan  $(X, Y)$  ialah pembolehubah rawak yang f.k.k.nya  $f(x, y)$ ,

$$f(x, y) = \frac{1}{4}; \quad (x, y) \in W$$



Cari:

- (i) f.k.k. sut bagi  $X$ ;
- (ii) f.k.k. sut bagi  $Y$ ;
- (iii) f.k.k. bersyarat bagi  $X$  diberi  $Y = -\frac{1}{2}$ ;
- (iv)  $E\left(X \mid Y = -\frac{1}{2}\right)$   $E\left(X^2 \mid Y = -\frac{1}{2}\right)$ ;

(50 markah)

- 4.(a) (i) Jika  $X$  ialah pembolehubah rawak yang fungsi penjana momennya  $M(t)$ ,

$$M(t) = e^{3t + \frac{1}{2}t^2}.$$

Cari  $P(2 < X < 4)$ .

- (ii)  $X$  ialah pembolehubah rawak yang fungsi penjana momennya  $M(t)$ ,

$$M(t) = e^{2(e^t - 1)}$$

dan  $Y$  ialah pemboleh rawak yang fungsi penjana momennya  $N(t)$ ,

$$N(t) = \left(\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\right)^4.$$

Cari  $E(X + 2Y)$ .

(30 markah)

- (b) Katakan  $E$  ialah peristiwa dan  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ialah satu partiisi bagi ruang sampel, maka

$$P(A_i | E) = \frac{P(A_i) P(E | A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P(E | A_i)}; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Buktikan pernyataan ini.

(20 markah)

...4/-

- (c)  $(X, Y)$  ialah pembolehubah rawak yang f.k.k.nya  $f(x, y)$ ,

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2}; \quad x > 1; \quad y > 1;$$

Takrifkan  $W = XY$ ;  
 $V = X / Y$ ;

Cari:

- (i) f.k.k. tercantum bagi  $(W, V)$
- (ii) f.k.k. sut bagi  $W$ .
- (iii) f.k.k. sut bagi  $V$ .

(50 markah)

- 5.(a)  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ialah sampel dari populasi normal yang minnya  $\mu$  dan variansnya  $\sigma^2$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}, \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}.$$

- (i) Tunjukkan bahawa  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ .
- (ii) Dapatkan f.k.k. bagi  $Y = S^2$ .
- (iii) Nyatakan taburan bagi  $T$ .

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}.$$

Petunjuk: f.k.k. bagi pembolehubah rawak khi-kuasadua dengan  $n$  darjah kebebasan ialah  $f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}; \quad x > 0$ .

(50 markah)

- (b)  $X_1, X_2, \dots, X_{16}$  ialah sampel dari populasi normal yang minnya 4 dan varians 25.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{16} X_i}{16}, \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{16} (X_i - \bar{X})^2}{15}.$$

Cari  $P(4 < \bar{X} < 6; S^2 < 16)$ .

(20 markah)

- (c)  $X$  ialah pembolehubah rawak yang f.k.k.nya  $f(x)$ ,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{10} & ; \quad -1 < x < 9; \\ 0 & ; \quad \text{tempat-tempat lain;} \end{cases}$$

Cari f.k.k. bagi  $Y = X^2$ .

(30 markah)

-ooo0ooo-