

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1993/94

Oktober/November 1993

MAT220 - Persamaan Pembezaan I

Masa: [3 jam]

Jawab semua **EMPAT** soalan.

1. (a) (i) Tunjukkan bahawa parabola $y = x^2$ dan garis $y = 2x - 1$ kedua-duanya adalah penyelesaian bagi persamaan

$$y' = 2x - 2\sqrt{x^2 - y}$$

dengan $y(1) = 1$.

- (ii) Adakah hal ini bercanggah dengan Teorem Kewujudan dan Keunikan? Jelaskan jawapan anda.

[40/100]

- (b) Tentukan suatu fungsi $M(x,y)$ supaya persamaan pembezaan berikut adalah tepat

$$M(x,y) dx + (xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x}) dy = 0$$

[30/100]

- (c) Persamaan $y(2xy + 1)dx + x(1 + 2xy - x^3y^3)dy = 0$ mempunyai suatu faktor pengamir dalam bentuk $1/(xy)^k$. Tentukan nilai k dan kemudian selesaikan persamaan ini..

[30/100]

2. (a) Tunjukkan bahawa penyelesaian am bagi $y'' - 3y' + 2y = 0$ ialah $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$. Seterusnya, dapatkan penyelesaian am bagi

$$y'' - 3y' + 2y = -\frac{e^{2x}}{e^x + 1}$$

[30/100]

- (b) Selesaikan $y'' + y' - 12y = \sinh 4x$ jika diberikan identiti $\sinh 4x = \frac{(e^{4x} - e^{-4x})}{2}$.

[30/100]

- (c) (i) Tunjukkan bahawa persamaan
 $F(x^2y^{1/2})y \, dx + G(x^2y^{1/2})x \, dy = 0$
 boleh ditukarkan kepada persamaan pembolehubah terpisah
 $H(x)dx + I(v)dv = 0$ dengan menggunakan transformasi
 $v = x^2y^{1/2}$.
- (ii) Seterusnya, selesaikan
 $(2 + 2x^2y^{1/2})y \, dx + (x^2y^{1/2} + 2)x \, dy = 0$
[40/100]
3. (a) Selesaikan $x dx + y dy + 4y^3(x^2 + y^2)dy = 0$
[30/100]
- (b) Tentukan bentuk yang sesuai bagi penyelesaian khusus persamaan
 $y^{(4)} + 9y'' = (x^2 + 1) \sin 3x$
[30/100]
- (c) Suatu model yang meramalkan kelakuan pengguna terhadap barangan A diberikan oleh
- $$\begin{aligned} X' &= a(Y - 2X) \\ Y' &= b(X - 2Y) + I_0, \end{aligned}$$
- dimana
- $X(t)$ mewakili paras pembelian bagi A,
 $Y(t)$ sikap pengguna terhadap A,
 I_0 adalah kesan iklan yang dianggap tetap sepanjang masa dan a, b ialah nombor positif
- (i) Tunjukkan bahawa
- $$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{I_0}{3b}$$
- dengan
- $$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(a + b) - (a^2 + b^2 - ab)^{1/2} \\ \lambda_2 &= -(a + b) + (a^2 + b^2 - ab)^{1/2} \end{aligned}$$
- dan c_1, c_2 adalah pemalar sebarang.
- (ii) Deduksikan bahawa
- $$x \rightarrow \frac{I_0}{3b} \text{ apabila } t \rightarrow \infty$$
- (iaitu paras pembelian mendekati suatu paras keseimbangan)

4. (a) Katakan $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ adalah fungsi-fungsi vektor di mana komponen ke- i fungsi-fungsi vektor ini (bagi suatu i tetap), $x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t)$ ialah fungsi-fungsi bernilai nyata yang tak bersandar linear.

(i) Tunjukkan bahawa fungsi-fungsi vektor ini sendiri adalah tak bersandar linear.

(ii) Seterusnya simpulkan sama ada fungsi-fungsi vektor berikut:

$$x_1 = \begin{pmatrix} \cos 5t \\ 2 \cos 5t \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} \sin 5t \\ 2 \sin 5t \end{pmatrix},$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} \cos 5\sqrt{3}t \\ -2 \cos 5\sqrt{3}t \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} \sin 5\sqrt{3}t \\ -2 \sin 5\sqrt{3}t \end{pmatrix}$$

bersandar linear atau tak bersandar linear.

[50/100]

- (b) Tentukan bentuk vektor penyelesaian khusus x_p bagi

$$\frac{dx}{dt} = 5x + 3y - 2e^{-t} + 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y + e^{-t} - 5t + 7$$

[50/100]

- ooo00ooo -