

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1993/94

Oktober/November 1993

MAT201 - Kalkulus Lanjutan

[Masa: 3 jam]

Jawab 4 soalan sahaja. Jika lebih daripada 4 soalan dicuba, hanya 4 jawapan yang pertama akan diambil kira. Tunjukkan **SEMUA** jalan kerja.

1. (a) (i) Diberi $f(r, \theta) = ar^n \cos n\theta + br^n \sin n\theta$ (a, b, n pemalar).
Tunjukkan f memenuhi persamaan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0$$

- (ii) Diberi $f = f(p^2 - q^2 - 2pq, q)$. Tunjukkan

$$(p + q) \frac{\partial f}{\partial p} + (p - q) \frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

- (b) Cari selang penumpuan bagi siri

$$Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n + 1)!} x^{2n+1}.$$

Seterusnya, tunjukkan bahawa $Y'(x) = xY(x) + 1$.

(c) Tentukan sama ada kamiran tak wajar berikut menumpu atau tidak.

$$(i) \int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^{1/2}}$$

$$(ii) \int_2^{\infty} \frac{x-2}{x^{3/2}+1} dx$$

$$(iii) \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{3/4} \sqrt{1+x^{3/4}}} dx$$

(d) Jika $0 < a_k \leq b_k$ untuk semua k dan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ menumpu maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ menumpu. Buktikan.

(100/100)

2. (a) Tentukan sama ada siri berikut menumpu atau mencapah. Bagi siri selang sili yang menumpu, tentukan sama ada penumpuannya adalah secara mutlak atau bersyarat.

$$(i) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\ln k)^3}{(\ln 3)^k}$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{1/2} 2^n}$$

$$(iii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{k}}{k+2}$$

$$(iv) \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k \ln k \ln(\ln k)}$$

- (b) (i) Dengan menggunakan kembangan bagi fungsi-fungsi yang diketahui bentuknya, dapatkan siri Maclaurin bagi

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

- (ii) Gunakan jawapan dalam bahagian (i) untuk menganggarkan nilai kamiran berikut jitu kepada 7 tempat perpuluhan

$$\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$$

- (c) Cari minimum dan maksimum bagi fungsi $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3x$ dalam domain $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

(d) Diberi $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

Adakah $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ wujud? Jelaskan jawapan anda.

(100/100)

3. (a) Katakan $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$ dan $x = h(y, z)$ ditakrifkan oleh persamaan

$$x^2y^2 + xz^3 - x^4 + zy^3 = 6.$$

- (i) Cari z_x, y_z dan x_y pada titik $(1, -1, 2)$.

- (ii) Tentusahkan bahawa

$$x_y y_z z_x = -1 \text{ pada titik itu.}$$

.../4

(b) Cari nilai had berikut, jika wujud

$$(i) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)}{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} k}$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln bn}{\ln cn}, \quad b, c > 0$$

(c) Tunjukkan bahawa jika

$$w = x_1^{p_1} x_2^{p_2} x_3^{p_3} \dots x_n^{p_n}, \quad \text{maka}$$

$$\frac{dw}{w} = p_1 \frac{dx_1}{x_1} + p_2 \frac{dx_2}{x_2} + \dots + p_n \frac{dx_n}{x_n}.$$

(d) Katakan $u = f(x, y)$, $x = g(r, s)$ dan $y = h(r, s)$. Dengan menganggap sifat-sifat keselanjaran yang bersesuaian bagi fungsi-fungsi di atas, buktikan bahawa

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \right) + \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\ &+ 2 \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

(100/100)

4. (a) Diberi

$$\begin{aligned} e^{xu} + e^{yv} - uv &= 1 \\ yu + xv + \cos 2y &= 3 \end{aligned}$$

$$\text{Cari } \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_v \text{ dan } \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)_x.$$

.../5

(b) Lakarkan setiap domain kamiran berikut dan seterusnya tukarkan tertib kamirannya.

$$(i) \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dx dy$$

$$(ii) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin x}^{\cos x} f(x, y) \, dy dx$$

$$(iii) \int_0^1 \int_{1-y}^{2-y} f(x, y) \, dx dy$$

(c) Nilaiakan kamiran berikut. Lakarkan juga domain kamirannya.

$$(i) \int_0^1 \int_{1-x}^{1+x} (2y + 3x) dy dx$$

$$(ii) \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} r^2 \, dr d\theta$$

(d) Katakan R pepejal dalam oktan yang pertama yang dibatasi oleh sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ dan satah-satah koordinat yz dan xz . Dengan menggunakan koordinat silinder, nilaiakan

$$\iiint_R xyz \, dV.$$

- (e) Diberi $z = f\left(\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}\right)$, di sini f merupakan suatu fungsi satu pembolehubah. Tunjukkan bahawa

$$f'(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{a}{x} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{b}{y} \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

(100/100)

5. (a) Dengan menggunakan kamiran gandatiga, kirakan isipadu bongkah yang terkandung di antara permukaan $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ dan $z = (x^2 + y^2)/a$, ($a > 0$) yang terletak dalam kawasan $z > 0$.

- (b) Dengan menggunakan koordinat sfera, tunjukkan bahawa

$$\iiint_S x^4 y^2 z^3 dV = 0,$$

di sini S ialah bongkah dalaman sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

- (c) Dengan menggunakan pembeza seluruh, anggarkan nilai berikut:

$$(4.1)^{1/2} + (26.9)^{1/3} + (256.3)^{1/4}.$$

Apakah nilai sebenarnya?

- (d) Bincangkan keselajaran fungsi berikut:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

.../7

(e) Tukarkan tertib kamiran berikut kepada tertib $\iiint f(x, y, z)dydzdx$.

$$\int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} \int_0^y dzdydx$$

(100/100)

- oooOOooo -