UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1987/88

MAT114 - Aljabar Linear

Tarikh: 16 April 1988 Masa: 9.00 pagi - 12.00 tengahari
(3 Jam)

Jawab EMPAT soalan; semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Cari nilai c supaya sistem persamaan linear

$$x - y + z = 3$$

$$3x + y - z = 2$$

$$x + 3y - 3z = c$$

adalah konsisten. Untuk nilai c yang anda dapat cari set penyelesaiannya.

(25/100)

(b) Tentusahkan bahawa

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & -7 & -12 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

adalah songsang

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$, kemudian cari X supaya AX = B

untuk B yang berikut

(i) $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ii) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(25/100)

.../2

(c) Selesaikan sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan Petua Cramer

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -1. \end{aligned}$$

(20/100)

(d) Katakan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(i) Dapatkan A^{-1}.

(ii) Cari X supaya $A^3X = A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(30/100)

2\. (a) Buktikan $A + AA^T + A^T$ simetri, A matriks n x n.

(15/100)

(b) $E = E_j^i$ ialah matriks baris permulaan yang didapati dari I dengan menukarkan baris ke-i dengan baris ke-j. Buktikan

$$E^n = \begin{cases} I \ , & \text{jika n genap} \\ E \ , & \text{jika n ganjil} \end{cases}$$

(15/100)

(c) Cari nilai penentu

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 0 & & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

(20/100)

(d) Misalkan A, B dua matriks $m \times m$. Buktikan atau sangkalkan pernyataan yang berikut:

(i) Jika $A^2 = A$ dan $A \neq I$ maka $\det(A) = 0$.

(ii) Jika B simetri maka ABA^T simetri juga.

(iii) Jika $A^T A = I$, maka $\det(A) = 1$.

(30/100)

(e) Matriks A diperturunkan ke matriks B dengan menggunakan beberapa operasi baris permulaan

$$A \xrightarrow{R_2^1} A_1 \xrightarrow{R_4^2(2)} A_2 \xrightarrow{R_1(3)} A_3 \xrightarrow{R_5^4} B .$$

Andaikan $\det(A_2) = 2$, cari

(i) $\det(A)$

(ii) $\det(B)$.

(20/100)

3. (a) Diberikan V suatu ruang vektor. Tuliskan syarat supaya $W \subseteq V$ adalah subruang V.

(i) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & c \end{bmatrix}, a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$ dengan operasi penambahan dan pendaraban skalar untuk matriks adalah subruang ruang vektor $M_{2 \times 3}$.

(ii) $W = \left\{ [a, b, c] \text{ dengan } \begin{matrix} a + b + c = 0 \\ a - b + c = 1 \end{matrix} \right\}$ dengan operasi penambahan dan pendaraban skalar yang piawai adalah subruang $\mathbb{R}_3 = \{[x,y,z]: x,y,z \in \mathbb{R}\}$.

(30/100)

(b) Andaikan $W = \{\underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2, \ldots, \underset{\sim}{u}_n\} \subset V$. Terangkan maksud W menjana V. Nyatakan syarat supaya W suatu asas V. Tunjukkan

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

.../4

menjana $\mathbb{R}^3$. Cari $T \subset S$ supaya T suatu asas $\mathbb{R}^3$ kemudian tuliskan $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ sebagai gabungan linear vektor-vektor di dalam T.

(35/100)

(c) Diberikan $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, tunjukkan

$$W = \{\underset{\sim}{x} : A\underset{\sim}{x} = 0 \text{ dan } \underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

adalah suatu subruang $\mathbb{R}^n$.

Untuk $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, tuliskan bentuk unsur-unsur W. Kemudian cari suatu asas W. Apakah dimensi W?

(35/100)

4. (a) Andaikan

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = 2$$

Cari

(i) $|2A^2|$ (ii) $|2A^{-1}|$ (iii) $|(2A)^{-1}|$

(iv) $A^T \operatorname{adj} A^T$ (v) BEBT adj A

(vi) $\begin{vmatrix} a+d-2g & b+e-2h & c+f-2j \\ g & h & j \\ d & e & f \end{vmatrix}$.

(40/100)

(b) Andaikan $A, P \in M_{n \times n}$ dan P^{-1} wujud. Tunjukkan

(i) $(PAP^{-1})^k = P A^k P^{-1}$, k integer positif.

(ii) Cari A^{100} jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(30/100)

(c) Andaikan $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $g(A) = A^3 - 3A^2 + 2A - I$.

Cari nilaieigen-nilaieigen bagi A dan g(A).

(30/100)

5. (a) (i) Terangkan pernyataan "matriks A serupa dengan matriks B". Kemudian tunjukkan matriks A dan B yang serupa mempunyai nilaieigen-nilaieigen yang sama.

(ii) Dengan menggunakan (i) atau cara lain, tunjukkan AB serupa dengan BA jika A dan B tak singular.

(25/100)

(b) Andaikan W ruang vektor yang dijanakan oleh

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Tentukan sama ada W = V jika $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix};\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

(30/100)

(c) Tunjukkan

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ terpepenjurukan,

kemudian cari P, matriks tak singular dan D, matriks pepenjuru supaya $P^{-1}BP = D$.

(30/100)

(d) Diberikan A suatu matriks 2 x 2. Tunjukkan $|A| = \lambda_1\lambda_2$ dengan λ_1, λ_2 ialah nilaieigen-nilaieigen A.

(15/100)

- oo0oo -