

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1993/94

Oktober/November 1993

MAT101 - Kalkulus

[Masa: 3 jam]

Jawab **EMPAT** (4) soalan sahaja.

1. (a) Selesaikan

(i) $0 \leq x^2 - x - 1 \leq 5$

(ii) $|x(x - 1)| < |x + 1|$

(iii) $\ln x \leq 2(\sqrt{x} - 1)$

(35/100)

(b) Cari $\delta \in (0, 2)$ supaya

$$|x^2 - 4| < 1 \text{ apabila } |x - 2| < \delta.$$

(15/100)

(c) Cari nilai had-had berikut (jika wujud):

(i) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - x^3}}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^3 - 1}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

(v) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x \right)$

(vi) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{100} + 1}{3x^{100} - x^5}$

(30/100)

.../2

- (d) Cari dua fungsi $y = f_1(x)$ dan $y = f_2(x)$ yang ditakrifkan secara tersirat oleh persamaan

$$xy^2 + y - 1 = 0.$$

Di antara fungsi-fungsi di atas, yang manakah yang boleh ditakrifkan supaya ia selanjur pada $x = 0$? Terangkan.

(20/100)

2. (a) Cari $\frac{dy}{dx}$ jika

(i) $y = \sin \sqrt{x + \sqrt{x}}$

(ii) $\cos y = \ln(x + y)^2$

(iii) $y = |1 - x^2|$

(iv) $y = x^2 + e^x + \tan^{-1}x + \cot x + 10^x$

(v) $y = u^2 + u - 1$, $u = \frac{v - 1}{v + 1}$, $v = x^2$

(vi) $y = t^2 + 1$, $x = 2\sqrt{t} + 3$

(30/100)

- (b) Andaikan

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \text{ jika } x < 1 \\ ax^2 + bx + c & , \text{ jika } x \geq 1 \end{cases}$$

Cari nilai a, b, c supaya $f'(1)$ wujud.

(15/100)

- (c) Andaikan $f(x)$ sebagai suatu fungsi yang terbezakan pada x_0 , dan $\ell(x)$ suatu garis lurus yang melalui titik $(x_0, f(x_0))$. Tunjukkan bahawa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ell(x) - f(x)}{x - x_0} = 0$$

.../3

jika dan hanya jika $\ell(x)$ adalah garis tangen kepada graf $y = f(x)$ pada x_0 .

(20/100)

(d) Diberi

$$f(x) = \frac{x}{(3x + 1)^2}.$$

- (i) Cari ekstremum tempatan jika wujud.
- (ii) Tentukan selang di mana f menokok atau menyusut.
- (iii) Bincangkan kecekungan dan cari titik lengkok balas.
- (iv) Cari asimptot mencancang dan asimptot mengufuk.
- (v) Lakarkan graf $y = f(x)$.

(35/100)

3. (a) Andaikan f sebarang fungsi yang selanjar pada $[a, b]$. Berikan takrif untuk yang berikut:

- (i) P , suatu petak bagi $[a, b]$
- (ii) $\|P\|$, norma petak P
- (iii) $L_p(f)$, hasil tambah bawah bagi f terhadap petak P
- (iv) $U_p(f)$, hasil tambah atas bagi f terhadap petak P
- (v) $R_p(f)$, hasil tambah Riemann bagi f terhadap petak P

- (vi) $\int_a^b f(x)dx$, kamiran tentu bagi f dari a ke b

(30/100)

(b) Tunjukkan bahawa bagi integer positif n ,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} \leq \ln 2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-1)+i}$$

(Petunjuk: Gunakan hasil tambah atas dan bawah bagi fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ pada $[1, 2]$).
(15/100)

(c) (i) Nyatakan Teorem Nilai Min bagi kamiran.

(ii) Tunjukkan bahawa

$$\frac{1}{9} \leq \int_1^2 \frac{1}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{2}$$

(15/100)

(d) Nilaikan kamiran berikut:

(i) $\int \frac{x+3}{(3-x)^{2/3}} dx$

(ii) $\int x^2 e^x dx$

(iii) $\int \sqrt{1+e^x} dx$

(iv) $\int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx$

(v) $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$

(vi) $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 nx dx$

(40/100)

4. (a) Tunjukkan bahawa

$$\int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+1}\right)$$

.../5

dengan menggunakan penggantian

(i) $u = \sqrt{1 + x^2}$

(ii) $\tan u = x.$

(20/100)

(b) Katakan

$$F(x) = \int_{1/\sqrt{3}}^x \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} dt + \int_{1/\sqrt{3}}^{1/x} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} dt, \quad x \neq 0$$

Tunjukkan bahawa

$$F(x) = \ln \left(\frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{2} + 1} \right)^2.$$

(20/100)

(c) Cari luas rantau yang dibatasi oleh lengkungan

$$r = 1 + 2 \cos \theta$$

(25/100)

(d) Dengan membahagikan selang pengamiran kepada 6 subselang cari nilai-nilai hampiran bagi

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

dengan menggunakan

(i) Petua Trapezium, dan

(ii) Petua Simpson.

(25/100)

- (e) Dengan membandingkan nilai kamiran

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt \text{ dan } \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt,$$

tunjukkan

$$\ln x \leq 2(\sqrt{x} - 1), \quad \forall x > 1.$$

(10/100)

5. (a) Adakah fungsi
- $f(x) = x - x^3$
- mempunyai nilai maksimum atau minimum? Terangkan.

(20/100)

- (b) Gunakan Teorem Nilai Min untuk menunjukkan

(i) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < 0.05$, jika $x \geq 100$

(ii) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} > 0.05$, jika $0 \leq x \leq 99$

(20/100)

- (c) Katakan

$$\int_0^{3x+2} f(t) dt = 4x^2 + 5x + 6$$

Cari $f(x)$.

(20/100)

- (d) Kawasan yang dibatasi oleh lengkungan
- $y^2 = 8x$
- dan
- $y = x^2$
- dikisarkan mengelilingi paksi-x. Cari isipadu bungkah yang terhasil.

(20/100)

(e) Suatu dawai yang panjangnya L dipotong menjadi dua bahagian. Satu bahagian dibentukkan sebagai segitiga sisi sama, dan yang lain sebagai bulatan. Bagaimanakah dawai itu patut dipotong supaya jumlah luasnya yang dilengkungi adalah

- (i) minimum
- (ii) maksimum?

(20/100)

- oooOOooo -