UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang Akademik 1993/94

<u>MAK 291 - Matematik II</u>

Oktober/November 1993

Masa: [3 jam]

Kertas ini mengandungi lima(5) soalan. Jawab **semua** soalan.

1. (a) Nilaikan

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy$$

$$D : [(x,y) | 0 \le y \le 1+x^2, \ -1 \le x \le 1]$$

(b) Jelaskan cara menjelmakan kamiran

$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

kepada kamiran yang hanya melibatkan koordinat kutub. Dengan meletak $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, buktikan bahawa

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+2xy\cos\beta+y^2)}\,dx\,dy = \frac{\beta}{2\sin\beta}, \quad 0 \le \beta \le \pi .$$

(c) Dapatkan persamaan Laplace dalam koordinat segi empat tepat $x^* = ax$, $y^* = by$, $z^* = cz$.

(100/100)

2. (a) Jika $u = f(y \log_e x)$ tunjukkan bahawa

$$xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - x^2 \log_e x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$$

(b) Entropi S dan tenaga E untuk suatu sistem termodinamik boleh dihubungkan melalui persamaan

$$dE = TdS - PdV$$

dengan P, V, T masing-masing tekanan, isipadu dan suhu untuk sistem.

Jika $F = E - TS$, $H = E + PV$, dan $G = H - TS$, tunjukkan bahawa

$$dF = -SdT - PdV$$
$$dH = TdS + VdP$$

dan

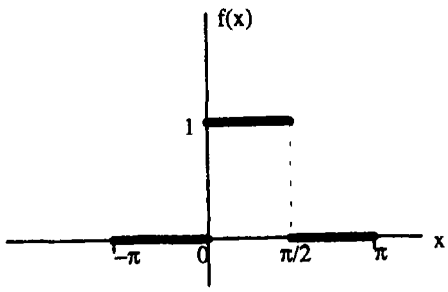
$$dG = -SdT + VdP.$$

Dengan ini dapatkan

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V, \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T, \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P, \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T, \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P, \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_S.$$

(100/100)

3. (a) Dapatkan siri Fourier bagi fungsi berikut yang dianggap mempunyai kala 2π



(b) Dapatkan siri sinus Fourier untuk

$$f(x) = e^x, \quad 0 \le x \le 1.$$

(c) Gunakan wakilan kamiran Fourier untuk menunjukkan bahawa

$$\int_0^\infty \frac{\cos xw}{1+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2}e^{-x} \quad (x > 0)$$

(100/100)

4. (a) Persamaan Bessel peringkat sifar boleh di tulis seperti

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0$$

Tunjukkan bahawa penyelesaian boleh ditulis seperti

$y = y_1(x) + y_2(x)$, dengan

$$y_1(x) = a_0\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right], \quad x>0$$

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1} H_m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right], \quad x>0$$

(b) Bincangkan bentuk penyelesaian bagi persamaan

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

disekitar titik-titik singular

(100/100)

5. Dengan membuat penukaran pembolehubah $x - 1 = t$, dapatkan dua penyelesaian tak bersandar berbentuk siri kuasa bagi persamaan

$$y'' + (x-1)^2 y' + (x^2 - 1)y = 0$$

dalam kuasa $(x - 1)$. Tunjukkan bahawa keputusan yang sama boleh didapati dengan mengembang $x^2 - 1$ dalam satu siri Taylor sekitar $x = 1$ dan seterusnya menggantikan

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n .$$

(100/100)

-ooOoo-