UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1998/99

Ogos/September 1998

MAA 111 - ALJABAR LINEAR

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:
Sila pastikan kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM soalan di dalam LAPAN halaman bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Markah penuh akan diambilkira daripada EMPAT penyelesaian terbaik kepada EMPAT soalan.

1. Perhatikan sistem persamaan linear berikut,

$$\begin{array}{rcrcl} x & - & 3ay & = & 3 \\ ax & - & (2-a)y & = & 2 \end{array} \qquad (1)$$

Tentukan nilai-nilai a di mana sistem persamaan linear (1) di atas

(a) tidak konsisten;

(b) mempunyai penyelesaian unik; dan,

(c) mempunyai bilangan penyelesaian yang tidak terhingga.

(30 markah)

Dengan mewakilkan kedua-dua persamaan dalam sistem (1) sebagai garis-garis lurus dalam koordinat Cartesan, huraikan jawapan-jawapan anda bagi (a), (b) dan (c) di atas.

(25 markah)

Perhatikan sistem persamaan berikut pula,

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & b_1 \\ 2x & + & 6y & - & 11z & = & b_2 \\ x & - & 2y & + & 7z & = & b_3 \end{array} \qquad (2$$

Cari satu persamaan bagi b_1, b_2 dan b_3 yang akan memastikan sistem persama linear (2) di atas mempunyai penyelesaian. Beri penerangan ringkas kepada jawap anda.

(10 marka

Berikan **julat** A **(atau** $\mathcal{R}(A)$**)** di mana $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$. Seterusnya, tentuk asas dan dimensi $\mathcal{R}(A)$.

(20 marka

Matriks $n \times n$ B dipanggil **matriks bersimetri pencong ('skew simetric')** ji ia memenuhi persamaan

$$B^T = -B.$$

Buktikan bahawa, jika matriks $n \times n$ B bersimetri pencong, maka

$$\det(B) = (-1)^n \det(B).$$

Tunjukkan juga bahawa, jika n satu integer **ganjil**, maka matriks B adalah singul

(15 marka

****

2. Matriks C diberikan di bawah,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Turunkan matriks C kepada **bentuk eselon baris (BEB)**nya. Tuliskan matr matriks permulaan yang mewakili setiap **operasi baris permulaan** yang diguna dalam penurunan tersebut. Seterusnya, tunjukkan bahawa C memenuhi persamaan berikut

$$EC = U,$$

di mana E ialah hasildarab matriks-matriks permulaan dan U ialah satu matriks segitiga atas.

(20 markah)

Andaikan D satu matriks **tak singular**. Tunjukkan bahawa D boleh ditulis sebagai hasildarab matriks-matriks permulaan, dalam kata lain,

$$D = E_1 E_2 \cdots E_n, \tag{4}$$

di mana n ialah satu nilai integer positif yang terhingga.

Gunakan persamaan (4) untuk membuktikan $\det(D) \neq 0$.

(20 markah)

Gunakan **Petua Cramer** untuk menyelesaikan sistem persamaan linear di bawah,

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 3 \\ 3x & + & y & & & = & 5 \\ x & + & y & + & z & = & -3 \end{array} \tag{5}$$

(30 markah)

Biar $R = [r_{ij}]$ mewakili satu matriks $n \times n$ yang tak singular. Tunjukkan bahawa,

$$R^{-1} = \frac{1}{\det(R)} adj(R),$$

di mana $[adj(R)]_{ij} = R_{ji}, \quad \forall \; 1 \leq i, j \leq n$, dan, R_{ji} mewakili kofaktor matriks R bagi pemasukkan dalam baris ke-j dan lajur ke-$i$nya.

(PETUNJUK: Jika $i \neq k$, $r_{i1}R_{k1} + r_{i2}R_{k2} + \cdots + r_{in}R_{kn} = 0$).

Seterusnya, jika matriks R di atas singular, tunjukkan bahawa

$$R \times adj(R) = \mathcal{O}_n,$$

di mana $\mathcal{O}_n$ ialah matriks sifar berperingkat $n \times n$.

(30 markah)

3. Berikut diberikan tiga contoh operasi-operasi penambahan $\oplus$ dan pendaraban ska
$\odot$ yang dijalankan ke atas vektor-vektor $\Re^2$.

(i)
$$(a,b) \oplus (c,d) = (a-c, b+d);$$
$$k \odot (a,b) = (ka, kb), \qquad k \in \Re.$$

(ii)
$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d);$$
$$k \odot (a,b) = (ka, b), \qquad k \in \Re.$$

(iii)
$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d);$$
$$k \odot (a,b) = (k^2 a, k^2 b), \qquad k \in \Re.$$

Dengan mengemukakan contoh-contoh yang sesuai (atau cara-cara lain), buktik bahawa $\Re^2$ **bukan** satu ruang vektor jika operasi operasi penambahan $\oplus$ dan p daraban skala $\odot$ ditakrifkan seperti dalam (i), (ii) dan (iii) di atas.

(30 mark

Biar U dan W mewakili subruang-subruang dalam ruang vektor V dengan opera operasi penambahan $\oplus$ dan pendaraban skala $\odot$. Takrifkan

$$U \oplus W = \{\tilde{u} \oplus \tilde{w} : \ \tilde{u} \in U, \ \tilde{w} \in W\}.$$

Dalam erti kata lain, setiap unsur dalam set $U \oplus W$ ialah hasiltambah antara sa unsur dari U dengan satu unsur dari W. Tunjukkan bahawa $U \oplus W$ satu subrua dalam V di bawah operasi $\oplus$ dan $\odot$.

(20 mark

Perhatikan ruang-ruang vektor berikut,

$$\Re^3 = \{\vec{x} : \vec{x} = (a,b,c), \ a,b,c \in \Re\}.$$
$$M_{22} = \left\{ A : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ a,b,c,d \in \Re \right\}.$$
$$\mathcal{P}_2 = \{at^2 + bt + c : \ a,b,c \in \Re\}.$$

Bagi setiap ruang vektor yang ditunjukkan di atas, berikan **satu** contoh subrua $U \oplus W$ (dengan menyatakan dengan jelas subruang-subruang kepada $\Re^3$, M_{22} d $\mathcal{P}_2$ masing-masing yang anda pilih untuk mewakili U dan W).

(15 mark

Jika U dan W subruang dalam ruang vektor V dan $U \cap W = \{\tilde{0}\}$, tunjukkan bahawa

$$\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W).$$

(35 markah)

****

4. Biar

$$U = \{(a, b, c, d) : b + c + d = 0, \ a, b, c, d \ \in \ \Re\},$$

dan

$$W = \{(a, b, c, d) : a + b = 0, \ c = 2d, \ a, b, c, d \ \in \ \Re\},$$

di mana U dan W adalah subruang dalam ruang vektor $\Re^4$ dengan operasi penambahan dan pendaraban skala piawai. Cari asas dan dimensi bagi

(a) U;

(b) W;

(c) $U \cap W$.

(30 markah)

Biar

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : b = c, a, b, c, d \in \Re \right\}.$$

Dalam kata lain, Ω mengandungi matriks-matriks **simetri** berperingkat 2×2. Justeru itu, Ω ialah subruang dalam ruang vektor M_{22} di bawah operasi penambahan dan pendaraban skala piawai. Tunjukkan bahawa

$$\dim(\Omega) = 3.$$

(10 markah)

Jika S pula satu subruang dalam M_{nn} di mana S mengandungi matriks-matriks simetri $n \times n$, di mana semua unsur pepenjuru utama dan unsur-unsur di atas pepenjuru utamanya mempunyai nilai-nilai bukan sifar yang berbeza, apakah $\dim(S)$?

(10 markah)

Perhatikan set-set berikut,

$$\Gamma = \{t^3 - 2t^2 + 5, t^3 + 3t - 4\}, \quad \Gamma \subset \{\text{set polinomial darjah } 3\};$$

$$\Phi = \{(0,1,1), (1,2,-1), (-1,-1,2)\}, \quad \Phi \subset \Re^3;$$

$$\Psi = \{\cos(2x), \cos^2(x), \sin^2(x)\}, \quad \Psi \subset \{\text{set fungsi-fungsi nyata}\}.$$

Tentukan samada set-set Γ, Φ dan Ψ di atas bersandar linear atau sebaliknya.

(30 markah

Biar $S \subset T$ di mana S dan T adalah subruang-subruang dalam ruang vektor V d bawah operasi-operasi penambahan $\oplus$ dan pendaraban skala $\odot$. Tunjukkan,

(i) jika S set bersandar linear, maka T juga satu set yang bersandar linear; dan

(ii) jika T set tak bersandar linear, maka S juga satu set tak bersandar linear.

(20 markah

****

5. Perhatikan set-set di bawah,

$$\Xi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Xi \subset M_{22};$$

$$\Theta = \{(1/2,-1,1), (1,-2,0), (-3,6,4)\}, \quad \Theta \subset \Re^3;$$

$$\Upsilon = \{(-1/2,1,1), (-1,2,0), (3,-6,4)\}, \quad \Upsilon \subset \Re^3;$$

Tentukan set-set yang **direntangi** oleh Ξ, Θ dan Υ (i.e. $span(\Xi)$, $span(\Theta)$ da $span(\Upsilon)$) masing-masing dan dapatkan $\dim(span(\Xi))$ dan $\dim(span(\Theta))$.

(35 markah

Jika $span(\Theta)$ dan $span(\Upsilon)$ dihuraikan menerusi koordinat Cartesan dalam 3-dimen apakah huraian-huraian yang sesuai bagi set-set ini? Apakah huraian yang sesuai ba set $span(\Theta) \cap span(\Upsilon)$?

(15 markah

Manakah di antara matriks-matriks di bawah mempunyai **ruang baris** yang sama?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

(30 markah)

Ruang nol C ialah set $\mathcal{N}(C)$ yang diberikan oleh

$$\mathcal{N}(C) = \{\vec{x} : C\vec{x} = \vec{0}\}, \quad \mathcal{N}(C) \subset \Re^3.$$

Dalam erti kata lain, $\mathcal{N}(C)$ ialah satu set yang mengandungi penyelesaian-penyelesaian kepada sistem homogen $C\vec{x} = \vec{0}$. Tentukan $\mathcal{N}(C)$ menggunakan matriks C yang diberikan di atas.

(10 markah)

Andaikan D satu matriks $n \times n$. Tunjukkan bahawa $\dim(\mathcal{N}(D)) = 0$ jhj pangkat $D = n$.

(10 markah)

****

6. Matriks F diberikan di bawah sebagai

$$F = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Cari nilai-nilai eigen F dan tentukan vektor-vektor eigennya yang sepadan dengan nilai-nilai tersebut.

(20 markah)

Katakan A matriks $n \times n$ dan ia **terpepenjurukan**. Dalam erti kata lain, $A = PDP^{-1}$, di mana lajur-lajur P mengandungi vektor-vektor eigen A, manakala $D = [d_{ij}]$ dengan

$$d_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{jika } i = j \\ 0 & \text{jika } i \neq j \end{cases}$$

di mana λ_i ialah nilai eigen A yang sepadan dengan vektor eigen dalam lajur ke-i P. Tunjukkan bahawa

$$A^k = PDP^{k}P^{-1}. \tag{7}$$

(10 markah)

Berdasarkan persamaan (7) di atas, dan dengan menunjukkan bahawa

$$[D^k]_{ij} = \begin{cases} \lambda_i^k & \text{jika } i = j \\ 0 & \text{jika } i \neq j \end{cases}$$

dapatkan F^2, F^3 dan F^4 di mana F ialah matriks yang ditakrifkan oleh persamaan (6) di atas.

(25 markah)

Biar $p(t) = t^4 - 3t^3 + 2t$ dan $q(t) = 2t^4 - t^3 - t + 2$. Dengan menggunakan matriks F yang diberikan dalam persamaan (6), berikan matriks $p(F) + q(F)$ dan tentukan nilai-nilai eigennya. Dapatkan polinomial r yang akan memastikan $r(F) = \mathcal{O}_2$ di mana $\mathcal{O}_2$ ialah matriks sifar berperingkat 2×2.

(15 markah)

Perhatikan matriks G berikut dan gunakan ia untuk menjawab soalan-soalan dalam bahagian (a) dan (b) di bawah,

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Berikan **polinomial cirian**, $f(\lambda)$ bagi G. Lakarkan polinomial ini dengan menggunakan λ sebagai paksi mendatar dan $f(\lambda)$ sebagai paksi menegak. Tandakan nilai-nilai eigen G pada lakaran anda.

(10 markah)

(b) Jika λ merujuk kepada nilai eigen G, apakah asas dan dimensi ruang nol $\mathcal{N}(\lambda I - G)$ bagi setiap nilai λ?

(20 markah)