UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1997/98

Februari 1998

MAA 111 - ALJABAR LINEAR

Masa : [3 jam]

---

**ARAHAN KEPADA CALON:**
Sila pastikan kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM soalan di dalam ENAM halaman bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **EMPAT** soalan sahaja.

1. (i) Jika $A$ satu matriks berperingkat $m \times n$, dan $A$ berada dalam **bentuk eselon baris terturun (B.E.B.T)**, apakah ciri-ciri yang perlu ada pada matriks $A$?

(20 markah)

(ii) Tunjukkan bahawa matriks identiti $I_3$ adalah B.E.B.T bagi matriks $B$ di bawah jhj $a \neq -1$:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}.$$

(20 markah)

(iii) Anda diberi sistem persamaan linear di bawah,

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + z &= 2 \\ x + 2y + a &= 5 \end{aligned}$$

Cari penyelesaian bagi sistem persamaan linear di atas menggunakan Petua Cramer (jika boleh) bagi nilai-nilai $a = 0$ dan $-1$.

(30 markah)

(iv) Andaikan $a = 1$. Gunakan nilai $a$ ini untuk mencari matriks songsangan bagi $B$ dengan menggunakan rumus di bawah,

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}\mathrm{adj}(B),$$

di mana $\mathrm{adj}(B)$ ialah *matriks adjoin* $B$. Tunjukkan bahawa

$$(\mathrm{adj}(B))^{-1} = \frac{1}{\det(B)}B = \mathrm{adj}(B^{-1}).$$

(30 markah)

2. (i) Apakah yang dimaksudkan dengan 'matriks imbuhan' bagi satu sistem persamaan linear yang mengandungi $m$ persamaan linear dan $n$ pembolehubah anu?

(5 markah)

(ii) Matriks imbuhan $[C|\underset{\sim}{d}]$ diperolehi dari $[A|\underset{\sim}{b}]$ melalui operasi baris permulaan (OBP) yang tertentu. Kedua-dua matriks ini diberi di bawah.

$$[A|\underset{\sim}{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right],$$

$$[C|\underset{\sim}{d}] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{array}\right],$$

di mana

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}, \qquad \text{dan} \qquad b'_i = b_i - \frac{a_{i1}b_1}{a_{11}},$$
$$a_{11} \neq 0, \qquad 1 \leq i \leq 3.$$

Tuliskan OBP-OBP yang digunakan untuk mendapatkan matriks $[C|\underset{\sim}{d}]$ di atas dan buktikan jawapan anda.

(20 markah)

(iii) Tunjukkan bahawa $[A|\underset{\sim}{b}]$ dan $[C|\underset{\sim}{d}]$ mewakili dua sistem persamaan linear yang mempunyai penyelesaian yang sama. Adakah keputusan ini benar bagi kesemua matriks $[C|\underset{\sim}{d}]$ yang diperolehi dari $[A|\underset{\sim}{b}]$ melalui OBP?

(35 markah)

(iv) Jika matriks $\underset{\sim}{b}$ dalam bahagian (ii) di atas digantikan dengan matriks identiti $I_3$ dan matriks imbuhan $[A|I_3]$ diturunkan kepada matriks $[E|F]$ yang berperingkat $3 \times 6$ yang berada dalam **bentuk eselon baris terturun**, apakah kesimpulan yang boleh anda buat sekiranya,

(a)

$$E = I_3,$$

(b)

$$E \neq I_3?$$

(10 markah)

(v) Andaikan

$$A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ -3 & \lambda + 5 \end{bmatrix}.$$

Cari nilai-nilai $\lambda$ di mana songsangan $A$ wujud. Dapatkan songsangan $A$ bagi salah satu daripada nilai-nilai ini.

(30 markah)

3. (i) Jika $U$ satu subruang dalam ruang vektor $\Re^n$, apakah takrifan yang sesuai bagi $U$?

(10 markah)

(ii) Andaikan $S$ dan $T$ subruang-subruang dalam satu ruang vektor $V$ yang tertakrif di bawah operasi-operasi $\oplus$ (penambahan) dan $\odot$ (pendaraban skala). Tunjukkan bahawa set tindanan $S \cap T$ adalah satu subruang dalam $V$.

(20 markah)

(iii) Set $F^{\Re}$ merujuk kepada ruang vektor yang mengandungi fungsi-fungsi nilai nyata dalam bentuk $f : \Re \rightarrow \Re$ dan operasi-operasi $\oplus$ dan $\odot$ bagi ruang vektor ini ditakrifkan seperti berikut,

Bagi setiap $f_i$ dan $f_j \in F^{\Re}$,

$$(f_i \oplus f_j)(x) = f_i(x) + f_j(x),$$

atau

$$f_i \oplus f_j : x \rightarrow f_i(x) + f_j(x),$$

dan bagi setiap skala $k$,

$$(k \odot f_i)(x) = kf_i(x),$$

atau

$$k \odot f_i : x \rightarrow kf_i(x), \qquad k \in \Re.$$

Adakah,

(a) set $F^{\Re^+}$ membentuk subruang dalam $F^{\Re}$? ($F^{\Re^+}$ ialah set yang mengandungi fungsi-fungsi nilai nyata positif, iaitu, jika $f \in F^{\Re^+}$, maka

$$f : \Re \rightarrow \Re^+,$$

$\Re^+$ ialah set nombor nyata positif).

(b) set $\mathcal{P}_n$, iaitu set polinomial darjah $\leq n$, satu subruang dalam $F^{\Re}$?

(c) set $V$ yang mengandungi fungsi-fungsi-fungsi niai nyata dalam bentuk,

$$f : x \rightarrow c$$

($c$ ialah satu nilai malar bukan sifar), satu subruang dalam $F^{\Re}$?

Berikan penjelasan bagi jawapan-jawapan anda di atas.

(30 markah)

(iv) Vektor-vektor $\underset{\sim}{p} = (2,2)$, $\underset{\sim}{q} = (-1,-1)$, $\underset{\sim}{r} = (-1,1)$ dan $\underset{\sim}{s} = (1,-1)$ adalah vektor-vektor dalam $\Re^2$. Jika

$$U = \text{span}\{\underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{q}\}, \quad \text{dan} \quad V = \text{span}\{\underset{\sim}{r}, \underset{\sim}{s}\},$$

(a) apakah ruang-ruang vektor yang diwakili oleh $U$, $V$ dan $U \cap V$?

(b) apakah dimensi ruang-ruang ini?

(c) berikan lakaran-lakaran graf yang sesuai untuk menggambarkan ruang-ruang ini dengan lebih jelas.

(40 markah)

4. (i) Terangkan sifat-sifat set vektor yang diperlukan untuk membentuk satu asas bagi $\Re^n$? Berikan satu contoh asas bagi $\Re^3$.

(20 markah)

(ii) Anda diberi satu subset kepada ruang vektor $M_{22}$ (set matriks berperingkat $2 \times 2$) dan ia ditunjukkan di bawah,

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(a) Apakah span($S$)?

(b) Tentukan samada $S$ satu set bersandar linear atau sebaliknya.

(c) Berikan set $T \subseteq S$ di mana $T$ ialah **set tak bersandar linear** terbesar yang boleh diperolehi dari $S$. Terangkan bagaimana ia boleh dibentuk dari $S$.

(d) Adakah $T$ membentuk satu asas bagi span(S)? Terangkan jawapan anda.

(e) Tentukan dim(span($S$)) dan jelaskan bagaimana jawapan anda diperolehi.

(65 markah)

(iii) Jika $M_{pq}$ satu ruang vektor mengandungi matriks-matriks $p \times q$, berikan satu contoh asas bagi ruang vektor ini. Apakah $\dim(M_{pq})$?

(15 markah)

5. Jawab soalan-soalan di bawah dengan merujuk kepada sistem homogen

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0},$$

di mana

$$A = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 3 \\ 0 & -4 & \lambda-5 \end{bmatrix}.$$

(i) Jika set $\mathcal{N}(A)$ ialah *ruang nol* bagi sistem homogen di atas, apakah yang terkandung di dalam set ini?

(5 markah)

(ii) Apakah asas (jika ada) bagi $\mathcal{N}(A)$ dalam kes-kes berikut,

(a)
$$\lambda = -2;$$

(b)
$$\lambda = 2;$$

(c)
$$\lambda = 0.$$

Berikan $\dim(\mathcal{N}(A))$ bagi kedua-dua kes di atas.

(69 markah)

(iii) Apakah hubungan antara $\dim(\mathcal{N}(A))$ dan pangkat $A$, $p(A)$?

(6 markah)

(iv) Julat matriks $A$ ditakrifkan seperti di bawah,

$$\mathcal{R}(A) = \{\underset{\sim}{y} : \underset{\sim}{y} = A\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{x} \in \Re^3\}.$$

Dalam kata lain $\mathcal{R}(A)$ ialah set yang mengandungi vektor-vektor $\underset{\sim}{y}$ yang akan memastikan sistem tak homogen $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}$ konsisten. Takrifan ini menunjukkan $\mathcal{R}(A)$ ialah satu subruang dalam $\Re^3$. Cari julat matriks $A$ yang diberikan di atas dengan mengandaikan $\lambda = -2$. Apakah $\dim(\mathcal{R}(A))$ dalam kes ini?

(20 markah)

6. (i) Berikan takrif bagi *ruang baris* matriks $P$.

(5 markah)

(ii) Jika $P$ satu matriks tak singular berperingkat $n \times n$, apakah dimensi ruang baris matriks $P$? Terangkan jawapan anda.

(10 markah)

(iii) Katakan

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Tunjukkan bahawa dimensi **ruang lajur** $P$ adalah 3 dan asasnya ialah

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Tunjukkan bahawa $P^{-1} = \frac{1}{9} P^T$.

(30 markah)

(iv) Cari nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen bagi matriks $A$ di bawah (Petunjuk: Salah satu nilai eigen bagi $A$ ialah 3). Anda dimaklumkan bahawa salah satu set vektor eigen bagi $A$ ialah asas kepada ruang lajur $P$ yang diberi di atas. Tentukan nilai-nilai eigen yang sepadan dengan setiap vektor eigen dalam set ini (tunjukkan dengan jelas semua pengiraan yang terlibat).

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & -1 & 6 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Adakah $A$ *terpenjurukan*? Terangkan jawapan anda.

(35 markah)

(v) Jika $A$ *terpenjurukan*, maka

$$A = PDP^{-1},$$

di mana $D$ ialah satu matriks pepenjuru yang mana pemasukkan pepenjurunya adalah nilai-nilai eigen matriks $A$. Tunjukkan bahawa

$$A = QDQ^T,$$

di mana $Q = P/3$. Adakah lajur-lajur dalam matriks $Q$ juga merupakan vektor-vektor eigen bagi $A$? Terangkan jawapan anda.

(20 markah)