

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1997/98

Februari 1998

MAA 101 - Kalkulus

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam EMPAT halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

1. Katakan R adalah set semua nombor nyata, dan

$$f : R \rightarrow R$$

ditakrifkan sebagai

$$f(x) = x^3 - x.$$

- (a) Tunjukkan bahawa f adalah suatu fungsi dari R ke R .

(10/100)

- (b) Tentukan sama ada f satu ke satu?

(10/100)

- (c) Tunjukkan f adalah suatu fungsi ganjil

(10/100)

- (d) Selesaikan

$$|y| < f(|y| + 1)$$

(15/100)

- (e) Dari (c) dan (d), deduksikan bahawa

$$f(-|y| - 1) < y < f(|y| + 1)$$

bagi semua y yang memenuhi (d).

(15/100)

...2/-

- (f) Gunakan Teorem Nilai Pertengahan atau dengan cara yang lain, tunjukkan bahawa f adalah fungsi keseluruhan.

(20/100)

- (g) Cari terbitan untuk fungsi

$$g(x) = |f(x)| + x^2.$$

(20/100)

2. (a) Dapatkan terbitan fungsi berikut:

(i) $f(x) = x^4 + 5x^{-1} + 10^{100},$

(ii) $g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}},$

(iii) $h(x) = \int_0^{x^2} \left(\int_0^y u^2 du \right) dy,$

(iv) $k(x) = x^2 k(x) + 3[k(x)]^2$

(25/100)

- (b) Nilaikan kamiran berikut:

(i) $\int (x^4 + 5x^{-1} + 10^{100}) dx,$

(ii) $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx,$

(iii) $\int x \ln x dx$

(iv) $\int_{-1}^1 \sqrt{|x| - x} dx.$

(25/100)

- (c) Cari nilai had berikut:

(i) $\lim_{x \rightarrow 5} (x^3 - 2x + 1),$

...3/-

$$(ii) \quad \text{had}_{x \rightarrow 0} \left(x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right).$$

$$(iii) \quad \text{had}_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x},$$

$$(iv) \quad \text{had}_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

(25/100)

(d) Katakan f adalah suatu fungsi yang mempunyai sifat-sifat berikut:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2), \text{ bagi semua } x_1, x_2 \in \mathbb{R};$$

$$f(x) = 1 + xg(x), \text{ bagi semua } x \in \mathbb{R}$$

di mana

$$\text{had}_{x \rightarrow 0} g(x) = 1.$$

Buktikan bahawa

$$(i) \quad \text{had}_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x).$$

$$(ii) \quad \int_a^b [f(x)]^5 dx = \frac{1}{5} \{ [f(b)]^5 - [f(a)]^5 \}.$$

(25/100)

3. (a) Gunakan pembeza untuk menunjukkan bahawa jika h adalah cukup kecil, maka

$$\sqrt{1+h} \sim 1 + \frac{h}{2}.$$

(20/100)

(b) Gunakan Teorem Rolle atau Teorem Nilai Min untuk menunjukkan bahawa bagi semua nombor nyata a , persamaan

$$x^3 - 3x + a = 0$$

mempunyai sebanyak-banyaknya satu punca dalam selang $[0, 1]$.

(20/100)

...4/-

- (c) Tunjukkan bahawa

$$\sqrt{1+x} < 4 + \frac{x-15}{8}$$

jika $x > 15$.

(20/100)

- (d) Kamirkan

$$\int [(x^2 - 4)(x + 2)]^{-2/3} dx$$

dengan menggunakan kaedah penggantian pembolehubah.

(20/100)

- (e) Cari
- $f(x)$
- jika

$$\int_0^{2x-3} f(u) du = 2x^2 - 4x + \frac{3}{2}.$$

(20/100)

4. (a) Lakarkan graf bagi suatu fungsi yang mempunyai sifat-sifat berikut:

- (i) Ekstremum tempatan pada $(-1, 7)$ dan $(3, 2)$;
- (ii) Titik lengkok balas pada $(1, 4)$;
- (iii) Graf cekung ke bawah hanya pada $x < 1$;
- (iv) Pintasan dengan paksi koordinat ialah $(-4, 0)$ dan $(0, 5)$.

(20/100)

- (b) Cari luas terbesar yang mungkin bagi suatu segiempat tepat yang mempunyai satu sisi pada paksi-x yang positif, dan satu sisi pada paksi-y yang positif dengan satu bucuanya pada lengkung
- $y = e^{-x}$
- .

(20/100)

- (c) Rantau yang dibatasi oleh lengkung-lengkung parabola
- $y = x^2$
- dan
- $y^2 = x$
- dikisarkan terhadap paksi-x. Cari isipadu kisanan yang dihasilkan.

(20/100)

- (d) Cari nilai minimum bagi
- x^x
- untuk
- $x > 0$
- .

(20/100)

- (e) Cari luas kawasan yang dibatasi oleh graf

$$r = 1 + \sin 2\theta.$$

(20/100)

- oooOooo -