UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1987/88

ZSC 310/3 - Kaedah Matematik III

Tarikh: 16 April 1988 Masa: 9.00 pagi - 12.00 tengahari (3 jam)

Jawab KESEMUA EMPAT soalan.
Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1. Selesaikan

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0$$

dengan syarat $y(0,t) = 0$, $y(3,t) = 0$,
$y(x,0) = 5\sin\pi x - 2\sin 3\pi x$, $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$, $|y(x,t)| < M$.

(90/100)

Terangkan masalah nilai sempadan ini secara fizik.

(10/100)

2. Pertimbangkan persamaan berikut yang menguasai getaran melintang yang kecil bagi seutas tali yang kenyal. Tali tersebut diregangkan (stretched) hingga panjang ℓ dan kemudiannya ditetapkan pada kedua-dua hujung titiknya.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Di sini $u(x,t)$ merupakan sesaran tali dan $c = \sqrt{\tau/\rho}$ ialah halaju, ρ ialah jisim tali per unit jarak dan τ ialah ketegangan tali itu. Syarat-syarat sempadan ialah

$U(0,t) = 0$, $U(\ell,t) = 0$ bagi semua t.

.../2

Syarat awal ialah

$$U(x,0) = f(x) \text{ dan } \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = g(x).$$

Dapatkan penyelesaian u(x,t) yang memenuhi syarat-syarat tersebut di atas.

(100/100)

3. (a) Apakah sifat-sifat fungsi berkala? Beri suatu contoh fungsi tersebut dan mengillustrasikannya melalui suatu graf.

(10/100)

(b) Nyatakan syarat-syarat Dirichlet bagi sesuatu fungsi f(x) yang dikembangkan di dalam siri Fourier.

(15/100)

(c) Jika fungsi f(t) dikembangkan di dalam sebutan siri Fourier sebagai

$$f(t) = \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \text{ kos } n\omega_o t + b_n \sin n\omega_o t)$$

di sini $\omega_o = 2\pi/T$, T ialah kala.

Cari siri Fourier untuk fungsi f(t) yang ditakrifkan oleh

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -T/2 < t < 0 \\ 1 & 0 < t < T/2 \end{cases}$$

Grafkan fungsi ini.

(55/100)

(d) Buktikan sifat fungsi delta, iaitu

$$\delta(at) = (1/|a|)\delta(t).$$

Adakah fungsi delta ini merupakan suatu fungsi wajar?

(20/100)

.../3

4. (a) Tunjukkan bahawa $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$

adalah suatu syarat cukup bagi wujudnya transformasi Fourier daripada f(t) iaitu

$$F(\omega) = \int_{\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt$$

(20/100)

(b) Dapatkan transformasi Fourier bagi $f(t) = e^{-a|t|}$, di sini $a > 0$.
Lukiskan gambarajah untuk f(t) dan transformasi Fouriernya $F(\omega)$.

(30/100)

(c) Ciri transformasi Laplace bagi $\int_0^t \frac{\sin u}{u}\, du$.

Jika $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, maka $\mathcal{L}\{\int_0^t F(u)du\} = \frac{f(s)}{s}$

Juga diberi $\mathcal{L}\{\frac{F(t)}{t}\} = \int_s^{\infty} f(u)du$

dan $\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$ $a > 0$

(25/100)

(d) Transformasi songsang Laplace bagi f(s) ialah

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$$

Cari $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\}$

Diberi $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+a^2}\} = \frac{\sin at}{a}$, $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+a^2}\} = \text{kos}\, at$

dan $\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at} F(t)$.

(25/100)

-oooOOooo-