UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1993/94

Oktober/November 1993

ZMC 211/3 - Kaedah Matematik II

Masa : [3 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab KESEMUA EMPAT soalan.
Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Jika $\underset{\sim}{A}$ dan $\underset{\sim}{B}$ ialah dua vektor sebarangan, tunjukkan bahawa

$$|\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}| \leq |\underset{\sim}{A}||\underset{\sim}{B}|$$

(10/100)

Keputusan ini dikenali sebagai ketaksamaan Cauchy-Schwarz.

(b) Bilakah $|\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}| = |\underset{\sim}{A}||\underset{\sim}{B}|$? (5/100)

(c) Dengan menggunakan hasildarab skalar tentusahkan ketaksamaan segitiga: jika $\underset{\sim}{A}$ dan $\underset{\sim}{B}$ ialah sebarang vektor, maka

$$|\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}| \leq |\underset{\sim}{A}| + |\underset{\sim}{B}|$$

(15/100)

(d) Tentusahkan identiti Lagrange, iaitu jika $\underset{\sim}{A}$ dan $\underset{\sim}{B}$ ialah vektor sebarangan maka

$$|\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B}|^2 = |\underset{\sim}{A}|^2|\underset{\sim}{B}|^2 - (\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B})^2$$

(15/100)

(e) Jika $\underset{\sim}{A} = (A_1\underset{\sim}{i} + A_2\underset{\sim}{j} + A_3\underset{\sim}{k})$, $\underset{\sim}{B} = (B_1\underset{\sim}{i} + B_2\underset{\sim}{j} + B_3\underset{\sim}{k})$ dan $\underset{\sim}{C} = (C_1\underset{\sim}{i} + C_2\underset{\sim}{j} + C_3\underset{\sim}{k})$ tentusahkan hukum kalis agihan bagi vektor-vektor, iaitu

$$\underset{\sim}{A} \times (\underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{C}) = \underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{C}$$

(20/100)

1. (f) Katakan $\underset{\sim}{A} = [1,2,-3]$, $\underset{\sim}{B} = [2,-1,1]$ dan $\underset{\sim}{C} = [-1,1,-1]$.

(i) Hitungkan $\underset{\sim}{A} \times (\underset{\sim}{B} \times \underset{\sim}{C})$ dan tentusahkan

$$\underset{\sim}{A} \times (\underset{\sim}{B} \times \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{C})\underset{\sim}{B} - (\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B})\underset{\sim}{C}$$

(ii) Hitungkan $(\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B}) \times \underset{\sim}{C}$ dan tentusahkan

$$(\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B}) \times \underset{\sim}{C} = (\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{C})\underset{\sim}{B} - (\underset{\sim}{B}\cdot\underset{\sim}{C})\underset{\sim}{A}$$

(35/100)

2. (a) Cari satu vektor normal berunit $\underset{\sim}{n}$ dengan permukaan yang diberi oleh $Z = x^2 + y^2$ pada titik (1,0,1).

(5/100)

(b) Jika $\underset{\sim}{f}$ dan $\underset{\sim}{g}$ adalah dua fungsi vektor, tunjukkan bahawa

$$\nabla \times (\underset{\sim}{f} + \underset{\sim}{g}) = \nabla \times \underset{\sim}{f} + \nabla \times \underset{\sim}{g}$$

(15/100)

(c) Tunjukkan kecapahan keikalan fungsi vektor $\underset{\sim}{f}$ adalah sifar, iaitu $\nabla\cdot(\nabla \times \underset{\sim}{f}) = 0$.

(10/100)

(d) Jika $\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{f}(x,y,z,t)$, tunjukkan bahawa

$$d\underset{\sim}{f} = (d\underset{\sim}{r}\cdot\nabla)\underset{\sim}{f} + \frac{\partial \underset{\sim}{f}}{\partial t}\,dt$$

(5/100)

(e) Diberi $\underset{\sim}{f}(x,y,z) = x^2\underset{\sim}{i} + y^2\underset{\sim}{j} + z^2\underset{\sim}{k}$, tunjukkan bahawa $f_x \equiv \partial f/\partial x$, f_y dan f_z adalah tegaklurus satu dengan lain.

(5/100)

(f) Cari vektor normal berunit $\underset{\sim}{n}$ bagi permukaan S yang diwakili oleh

$$x = x, \quad y = y, \quad z = z(x,y)$$

di sini x dan y ialah parameter.

(20/100)

2. (g) Cari $\underset{\sim}{T}$, κ, $\underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{B}$ dan τ untuk satu bulatan C berjejari a yang diwaili oleh

$$\underset{\sim}{r}(s) = a\cos(s/a)\underset{\sim}{i} + a\sin(s/a)\underset{\sim}{j}$$

di sini $\underset{\sim}{T}$ ialah vektor tangen berunit dengan lengkung C, κ ialah kelengkungan lengkung, $\underset{\sim}{N}$ ialah vektor normal prinsipal unit, $\underset{\sim}{B}$ ialah vektor binormal unit dengan dengan lengkung dan τ ialah jejari kilasan. Beri maksud bagi κ dan τ.

(40/100)

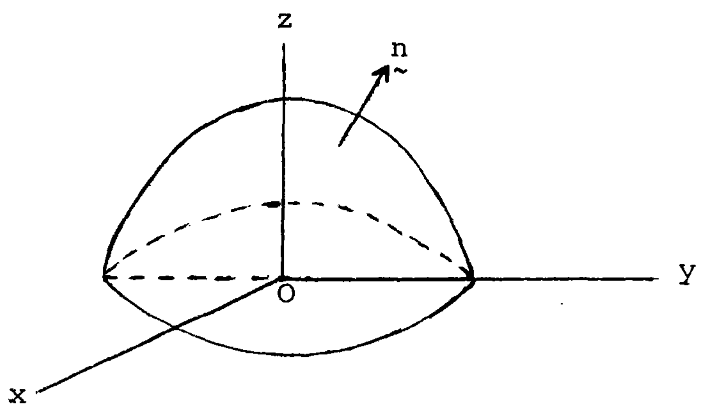
3. (a) Jika $\underset{\sim}{f} = f_1(x,y,z)\underset{\sim}{i} + f_2(x,y,z)\underset{\sim}{k} + f_3(x,y,z)\underset{\sim}{k}$, tunjukkan bahawa kamiran permukaan untuk $\underset{\sim}{f}$ dapat diungkapkan sebagai

$$\iint_S \underset{\sim}{f}\cdot d\underset{\sim}{S} = \iint_S \underset{\sim}{f}\cdot\underset{\sim}{n}\, dS = \pm\iint_{R_{yz}} f_1 dydz \pm \iint_{R_{zx}} f_2 dzdx \pm \iint_{R_{xy}} f_3 dxdy$$

di sini R_{yz}, Rz_x dan R_{xy} masing-masing ialah unguran S pada satah yz, zx dan xy.

(30/100)

(b)



Jika $\underset{\sim}{f} = x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j} + 2z\underset{\sim}{k}$, nilaikan $\iint_S \underset{\sim}{f}\cdot d\underset{\sim}{S}$, di sini S ialah bahagian permukaan paraboloid $x^2 + y^2 = 1-z$ yang baginya $z > 0$. Lihat rajah di atas.

(70/100)

4. (a) Jika $\underset{\sim}{f} = P(x,y,z)\underset{\sim}{i} + Q(x,y,z)\underset{\sim}{j} + R(x,y,z)\underset{\sim}{k}$ dan R ialah rantau yang dibatasi oleh sutau permukaan tertutup S, tunjukkan bahawa teorem kecapahan

$$\iiint_R \nabla\cdot\underset{\sim}{f}\, dv = \oiint_S \underset{\sim}{f}\cdot d\underset{\sim}{S}$$

diungkapkan di dalam koordinat segiempat tepat ialah

$$\iiint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

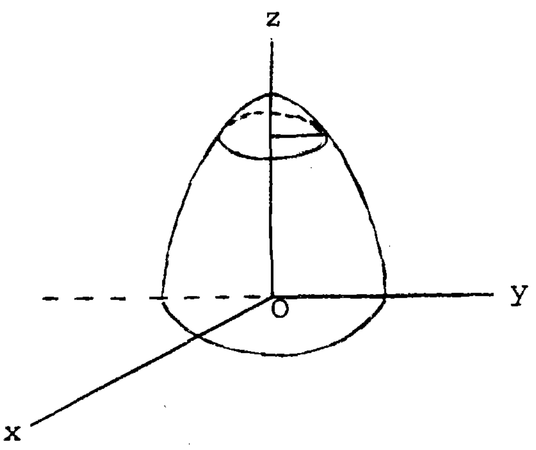
$$= \iint_S (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy)$$

(25/100)

(b) Dengan menggunakan teorem di atas nilaikan

$$I = \iint_S xdydz + ydzdx + 2zdxdy$$

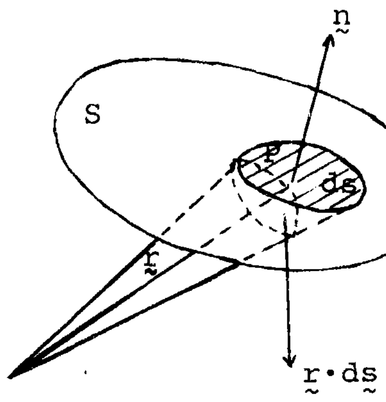
di sini S ialah permukaan tertutup yang terdiri daripada permukaan paraboloid $x^2 + y^2 = 1-z$, $0 < z < 1$ dan piring $x^2 + y^2 \leqslant 1;\ z = 0$, seperti yang ditunjukkan di dalam rajah di bawah.



(40/100)

...5/-

4. (c)



Jika $\underset{\sim}{r}$ ialah vektor kedudukan yang mewakili suatu titik P di atas permukaan S. Sudut pepejal $d\Omega$ yang dicangkum pada asal oleh unsur dS daripada permukaan S ditakrif sebagai

$$d\Omega = \underset{\sim}{r} \cdot \frac{d\underset{\sim}{S}}{r^3}$$

Sudut pepejal penuh Ω yang dicangkum oleh permukaan S diberi oleh

$$\Omega = \iint_S \underset{\sim}{r} \cdot \frac{d\underset{\sim}{S}}{r^3}$$

Tunjukkan bahawa sudut pepejal penuh yang dicangkum oleh permukaan tertutup S pada asal O ialah sifar jika O terletak di luar rantau R yang dibatasi oleh S; dan nilainya ialah 4π jika O terletak di dalam rantau R.

(35/100)

- oooOooo -