UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1995/96

Oktober/November 1995

ZSC 310 - Kaedah Matematik III

Masa : [3 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TIGA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab kesemua **EMPAT** soalan. Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1.(a) Buktikan bahawa $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$ jika $m \neq n$.

Khiasan: gunakan persamaan pembezaan Legendre yang baginya $P_m(x)$ dan $P_n(x)$ adalah penyelesaian, iaitu

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

(35/100)

(b) Buktikan bahawa $\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$

Khiasan: Gunakan fungsi penjana bagi polinom Legendre, iaitu

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

Perhatikan: $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right\}$

(35/100)

(c) Buktikan bahawa

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} \times P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$$

(20/100)

(d) Diberi $P_o(x) = 1$, $P_1(x) = x$, dapatkan (i) $P_2(x)$ dan (ii) $P_3(x)$.

(10/100)

...2

2. Fungsi Bessel ditakrif melalui kembangan siri, iaitu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n = \text{eksp}\left\{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})\right\}$$

(a) Dengan menggunakan takrif ini dapatkan siri untuk $J_n(x)$. (25/100)

(b) Tentukan siri untuk $J_{-n}(x)$ (25/100)

(c) Dengan demikian tunjukkan bahawa

$$(-1)^n J_n(x) = J_{-n}(x)$$ (15/100)

(d) Gantikan $t = e^{i\theta}$ di dalam takrif bagi $J_n(x)$ di atas dan buktikan bahawa

[i] $\text{Cos}(x \sin\theta) = J_o(x) + 2J_2(x)\text{ Cos }2\theta + 2J_4(x)\text{ Cos }4\theta + \ldots.$

[ii] $\text{Sin}(x \sin\theta) = 2J_1(x)\text{ Sin }\theta + 2J_3(x)\text{ Sin }3\theta + 2J_5(x)\text{ Sin }5\theta + \ldots.$

(35/100)

Perhatikan: $\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \dfrac{\pi}{\sin n\pi}$.

3. Diberi $J_n(x) = \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (x/2)^{n+2r}}{r!\,\Gamma(n+r+1)}$

(a) Buktikan bahawa [i] $J_{1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x,$

[ii] $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x$

Perhatikan $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (30/100)

(b) Buktikan bagi semua n

[i] $\dfrac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} = x^n J_{n-1}(x)$

[ii] $\dfrac{d}{dx}\{x^{-n} J_n(x)\} = -x^{-n} J_{n+1}(x)$

(30/100)

....3

(c) Buktikan bahawa bagi semua n

[i] $$J'_n(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$$

[ii] $$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$$

(20/100)

(d) Tunjukkan bahawa

[i] $$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x - x\cos x}{x}\right)$$

[ii] $$J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{x\sin x + \cos x}{x}\right)$$

(20/100)

4. Seutas tali yang berpanjang ℓ diregangkan diantara dua titik (0, 0) dan (ℓ, 0) di atas paksi x. Pada masa $t = 0$ tali ini mempunyai bentuk yang diberi oleh fungsi $f(x)$, $0 < x < \ell$, dan ia dilepaskan daripada keadaan rehat. Cari sesaran tali tersebut, iaitu $y(x, t)$ pada sebarang masa kemudian.

Persamaan gelombang yang memperihalkan getaran tali ini ialah

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \qquad \begin{array}{c} t > 0 \\ 0 < x < \ell \end{array}$$

di sini a ialah suatu pemalar.

(100/100)

- oooOooo -