UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1987/88

ZSC 310/3 - Kaedah Matematik II

Tarikh: 1 November 1987 Masa: 9.00 pagi - 12.00 t/hari.
(3 jam)

Jawab SEMUA EMPAT soalan.
Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1. Fungsi Gamma $\Gamma(n)$ dan Beta $B(m,n)$ ditakrifkan oleh

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx$$

$$B(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \,\text{kos}^{2n-1}\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1}\, dx.$$

(a) Buktikan bahawa $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ $m,n > 0.$

(50/100)

(b) Nilaikan $\displaystyle\int_0^\infty x^m e^{-ax^n}\, dx$

di sini m,n dan a adalah pemalar positif.

(25/100)

(c) Nilaikan $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$. (25/100)

2. Polinom Hermite ditakrifkan oleh fungsi penjana

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!} .$$

...2/-

(a) Tunjukkan bahawa

(i) $H_n'(x) = 2n\, H_{n-1}(x)$

(ii) $H_{n+1}(x) = 2x\, H_n(x) - 2n\, H_{n-1}(x)$

(iii) $H_n'(x) = 2x\, H_n(x) - H_{n+1}(x)$.

(40/100)

(b) Dengan demikian nilaikan kamilan

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx$$

diberi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx &= \sqrt{\pi}\, 2^n n! & \quad m = n \\ &= 0 & \quad m \neq n. \end{aligned}$$

(60/100)

3. Sebuah plat yang bulat dan berjejari unit permukaan satahannya ditebatkan. Jika suhu pada awal ialah $F(\rho)$ dan jika tepi plat ditetapkan pada suhu sifar, dapatkan suhu plat pada sebarang masa.

Persamaan pembauran haba ialah

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\right)$$

di dalam koordinat kutub (ρ, ϕ) dan u ialah haba.

Perhatian: Persamaan Bessel tertib n di dalam ρ ialah,

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + (\lambda\rho^2 - n^2)R = 0$$

di sini $R \equiv R(\rho)$

dan hubungan berortogon bagi fungsi Bessel ialah

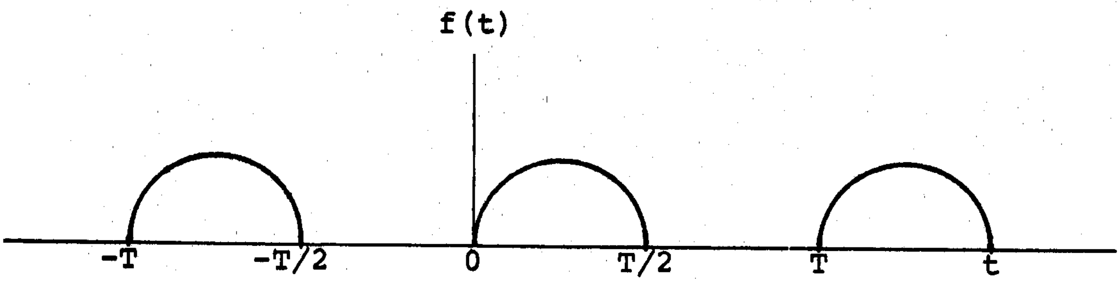
$$\begin{aligned} \int_0^1 xJ_p(ax)J_p(bx)\, dx &= \frac{1}{2} J_{p+1}{}^2(a) & \quad a = b \\ &= 0 & \quad a \neq b. \end{aligned}$$

(100/100)

4. (a) Dapatkan siri Fourier bagi fungsi f(t) yang ditakrifkan oleh

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ A \sin \omega_o t & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

dan $f(t + T) = f(t)$, $\omega_o = 2\pi/T$. (Lihat rajah di bawah).



(60/100)

(b) Dapatkan transformasi Fourier bagi denyutan bersegi-empat g(t) yang ditakrifkan oleh

$$g(t) = 1 \qquad |t| < \tfrac{1}{2}a$$
$$= 0 \qquad |t| > \tfrac{1}{2}a.$$

(40/100)

- oooOooo -