

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2000/2001

Februari/Mac 2001

ZCT 304/3 - Keelektrikan dan Kemagnetan

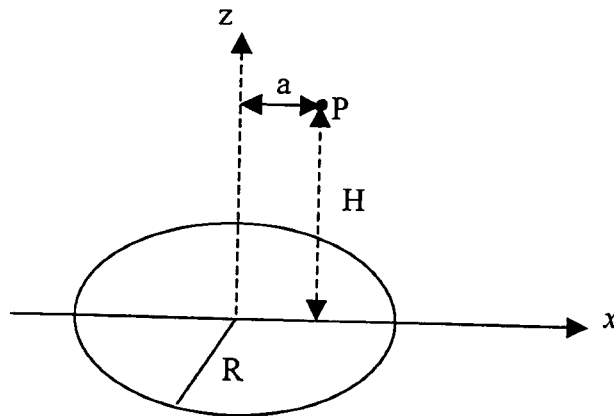
Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LAPAN** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab semua **EMPAT** soalan di Bahagian A dan mana-mana **EMPAT** soalan di Bahagian B. Kesemuanya ada 10 soalan. Tiap-tiap soalan dalam Bahagian A diberi 10% manakala soalan dalam Bahagian B diberi 15% tiap-tiap satu. Kesemuanya wajib dijawab dalam Bahasa Malaysia.

BAHAGIAN A

1. Pertimbangkan konfigurasi cas garisan berbentuk bulatan seperti di Rajah 1. Ia mempunyai ketumpatan cas garisan λ Coul./m. Cari \vec{E} di titik P. Gunakan koordinat silinderan. (Anda tidak perlu selesaikan kamiran yang terhasil).



Rajah 1

(10/100)

...2/-

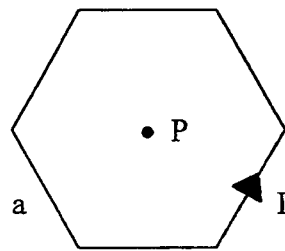
2. Bermula dari takrifan keupayaan elektrik;

$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

- (a) buktikan bahawa $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$.
 (b) tuliskan keupayaan elektrik di $r = 0$.

(10/100)

3. Cari medan magnet di pusatan, satu heksagon bersisi a yang membawa arus mantap I seperti di Rajah 2.



Rajah 2

(10/100)

4. (a) Tunjukkan bahawa

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}V.$$

- (b) Terangkan maksud persamaan di atas.

(10/100)

...3/-

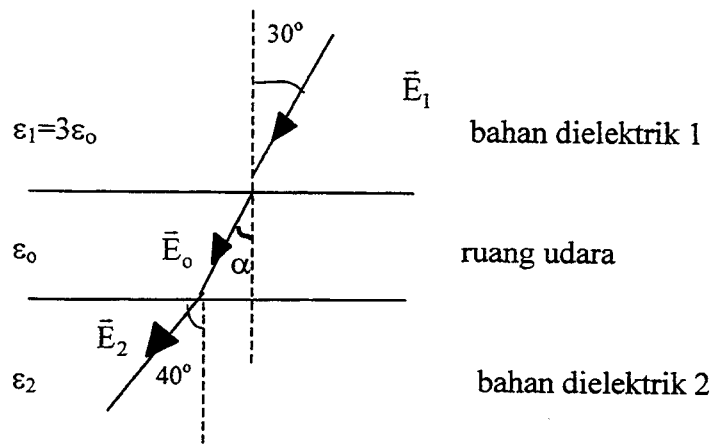
BAHAGIAN B

5. (a) Buktikan syarat-syarat sempadan yang berikut di antara dua bahantara dielektrik dengan pemalar kerentanan dielektrik ϵ_1 dan ϵ_2 :-

$$D_{\perp 1} = D_{\perp 2}$$

$$E_{\parallel 1} = E_{\parallel 2}$$

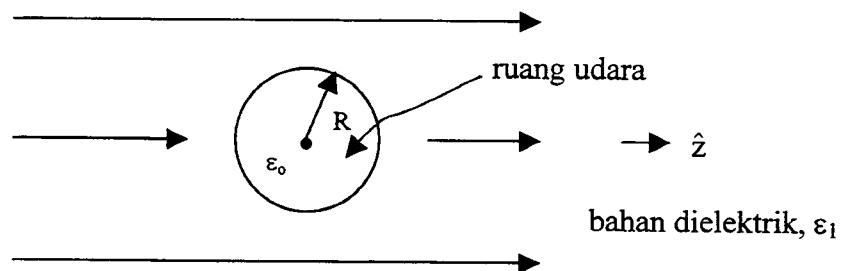
- (b) Satu ruang udara terperangkap di antara dua bahan dielektrik. Sila lihat rajah 3. Bahan dielektrik di sebelah atas ruang udara tersebut mempunyai pemalar kerentanan dielektrik $\epsilon_1 = 3\epsilon_0$ dan bahagian bawah mempunyai pemalar ϵ_2 . Medan elektrik disetiap kawasan adalah seperti yang ditunjukkan di bawah. Dengan menggunakan syarat-syarat sempadan, di bahagian (a) di atas, dapatkan sudut α . Cari ϵ_2 di dalam sebutan ϵ_0 .



Rajah 3

(15/100)

6. Pertimbangkan situasi berikut



Rajah 4

...4/-

Satu sfera udara terperangkap di dalam satu bahantara dielektrik dengan pemalar kerentanan ϵ_1 . Ia mempunyai pengkutuban seragam $\vec{P}_1 = k_1 \hat{z}$

- (a) Tunjukkan bahawa medan elektrik \vec{E} di bahan dielektrik adalah

$$\vec{E} = \left(\frac{k_1}{\epsilon_1 - \epsilon_0} \right) \hat{z}$$

- (b) Tuliskan syarat-syarat sempadan di $r = R$ dan di $r \rightarrow \infty$
- (c) Dengan berpandukan penyelesaian am persamaan Laplace $\nabla^2 V(r, \theta) = 0$

$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta)$$

di mana

$P_0(x)$	$= 1$
$P_1(x)$	$= x$
$P_2(x)$	$= (3x^2 - 1)/2$
$P_3(x)$	$= (5x^3 - 3x)/2$
$P_4(x)$	$= (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$
$P_5(x)$	$= (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$

$$(x = \cos \theta)$$

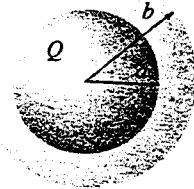
dapatkan keupayaan elektrik di dalam ruang udara tersebut.

(15/100)

7. Satu sfera logam berjejari a membawa cas Q . Ianya disaluti oleh satu bahan dielektrik (pemalar kerentanan dielektrik ϵ_1) sehingga jejaringnya menjadi b . Sila lihat Rajah 5.

- (a) Dapatkan nilai-nilai \vec{D} , \vec{P} dan \vec{E} di kawasan-kawasan: $r \leq a$, $a < r \leq b$, dan $r > b$.
- (b) Cari ρ_b dan σ_b .
- (c) Tunjukkan bahawa jumlah cas terikat di dielektrik adalah sifar.
- (d) Cari keupayaan elektriknya dipusatan.

...5/-



Rajah 5

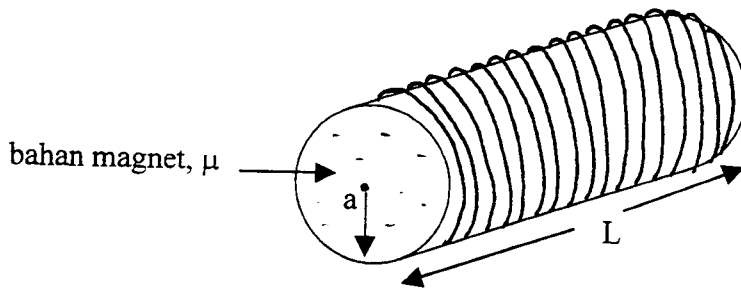
(15/100)

8. (a) Buktikan bahawa medan magnet yang dihasilkan oleh satu solenoid unggul adalah

$$B_z = \mu_0 n I$$

di mana n adalah bilangan lilitan per meter.

- (b) Satu solenoid sepanjang L dengan bilangan lilitan N dan berjejari a mengandungi bahan magnet (pemalar ketelapan μ) dibahagian dalamnya



Rajah 6

- (i) Dapatkan \vec{A} di bahagian dalam dan luar solenoid: $r < a$ dan $r \geq a$.
- (ii) Cari \vec{M} , $\vec{\lambda}_e$ dan \vec{J}_e diruang bahan magnet.

(15/100)

... 6/-

9. Persamaan-persamaan Maxwell di dalam bentuk pembezaan bagi ruang tanpa cas atau arus adalah:

$$(i) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$(ii) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(iii) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(iv) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- (a) Terangkan maksud $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ dan $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$.
- (b) Terbitkan persamaan-persamaan di atas dalam bentuk kamiran.
- (c) Tuliskan persamaan-persamaan di atas bagi bahan dielektrik yang mempunyai pemalar kerentanan dielektrik ϵ dan ketumpatan cas bebas ρ_f .

(15/100)

10. Medan elektrik bagi satu gelombang sferaan adalah

$$\vec{E}(r, \theta, \phi, t) = A \frac{\sin \theta}{r} \left[\cos(u) - \frac{1}{kr} \sin(u) \right] \hat{\phi}$$

di mana $u = kr - \omega t$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

- (a) Tunjukkan bahawa \vec{E} yang diberikan mematuhi semua persamaan Maxwell dan cari medan magnet yang sepadanan.
- (b) Hitung vektor Poynting yang terlibat.

(15/100)

...7/-

VECTOR DERIVATIVES

Cartesian. $dl = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}; \quad d\tau = dx dy dz$

Gradient : $\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial t}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{z}$

Divergence : $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Curl : $\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{z}$

Laplacian : $\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$

Spherical. $dl = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}; \quad d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

Gradient : $\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\phi}$

Divergence : $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$

Curl : $\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r}$
 $+ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$

Laplacian : $\nabla^2 t = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$

Cylindrical. $dl = ds \hat{s} + s d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}; \quad d\tau = s ds d\phi dz$

Gradient : $\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s} \hat{s} + \frac{1}{s} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{z}$

Divergence : $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s v_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Curl : $\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{s} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s} \right] \hat{\phi} + \frac{1}{s} \left[\frac{\partial}{\partial s} (s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi} \right] \hat{z}$

Laplacian : $\nabla^2 t = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial t}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$

VECTOR IDENTITIES

Triple Products

$$(1) \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$(2) \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

Product Rules

$$(3) \quad \nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$$

$$(4) \quad \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

$$(5) \quad \nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$$

$$(6) \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$(7) \quad \nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$$

$$(8) \quad \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

Second Derivatives

$$(9) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$(10) \quad \nabla \times (\nabla f) = 0$$

$$(11) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

FUNDAMENTAL THEOREMS

$$\text{Gradient Theorem : } \int_a^b (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$$

$$\text{Divergence Theorem : } \int (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\text{Curl Theorem : } \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

- ooo O ooo -