

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan KSCP
Sidang Akademik 1999/2000

April 2000

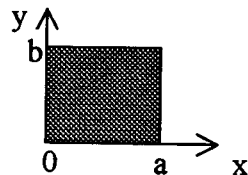
ZCT 218/4 – Kaedak Matematik

Masa : [3 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab kesemua EMPAT soalan. Kesemuanya wajib dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. Suatu membran yang bergetar di bawah pengaruh ketegangan T dan jisim per unit luas σ adalah berbentuk segiempat tepat dengan panjang sisi a dan b , sempadannya diikat dengan ketat.



Rajah 1

- (a) Tuliskan persamaan gelombang dua dimensi untuk amplitud getaran sistem ini.

- (b) Anggapkan penyelesaian amplitud getaran sistem ini ialah (4/25)

$$\psi(x, y, t) = U(x, y) T(t) = P(x) Q(y) T(t)$$

Gunakan kaedah pemisahan pembolehubah untuk menyelesaikannya.

- (c) Daripada huraian di atas, tuliskan syarat-syarat sempadan untuk sistem ini.

(8/25)

(4/25)

...2/-

- 2 -

- (d) Selesaikan $\psi(x, y, t)$ yang sepadan dengan syarat-syarat sempadan ini. (4/25)
- (e) Diberi syarat-syarat awal untuk sistem itu ialah

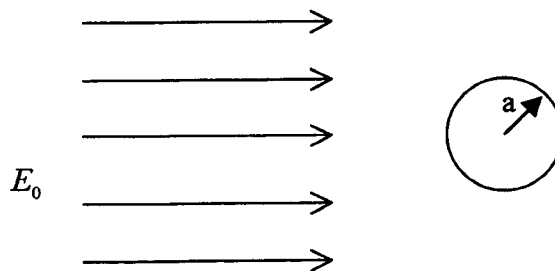
$$\psi_{nm}(x, y, 0) = 0 \quad \text{dan} \quad \left. \frac{\partial \psi_{nm}(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = ck_{nm} U_{nm}(x, y)$$

Di sini indeks n, m merujuk kepada mod-mod normal sistem itu, c ialah halaju gelombang membran yang bergetar dan k ialah nombor gelombang atau pemalar pemisahan pembolehubah.

Cari penyelesaian am untuk sistem ini, iaitu $\psi(x, y, t)$, dan kemudian tentukan frekuensi-frekuensi yang sepadan dengan mod-mod normal itu.

(5/25)

2. Di dalam suatu ruang, wujudnya suatu medan elektostatik yang sekata, E_0 . Satu konduktor berbentuk sfera yang *tidak bercas* diletakkan di dalam ruang itu (Rujuk kepada Rajah 2 di bawah).



Rajah 2

- (a) Tuliskan persamaan Laplace untuk keupayaan electrostatik sistem ini. (4/25)
- (b) Dapatkan penyelesaian am untuk persamaan Laplace ini dengan kaedah pembolehubah-pembolehubah terpisah. (5/25)
- (c) Tuliskan syarat-syarat sempadan untuk sistem ini. (4/25)

...3/-

- 3 -

(d) Dengan menggunakan keputusan-keputusan di dalam (b) dan (c), terbitkan keputusan elektrostatik untuk seluruh ruang di luar konduktor itu.

(6/25)

(e) Terbitkan medan elektrik di dalam ruang tersebut dengan menggunakan keputusan di dalam (d).

(6/25)

Diberi operator ∇ dan ∇^2 untuk sistem koordinat sfera:

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Diberi harmonik-harmonik sfera tertib yang rendah seperti berikut:

$$Y_0^0(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_1^1(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_1^{-1}(\theta, \phi) = +\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}$$

$$Y_2^2(\theta, \phi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{i2\phi}$$

$$Y_2^1(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^0(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$Y_2^{-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\phi}$$

$$Y_2^{-2}(\theta, \phi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{-i2\phi}$$

...4/-

3. (a) Gelombang output untuk suatu rektifier penuh diwakili oleh fungsi

$$g(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi \\ -\sin x, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

untuk julat $-\pi < x < \pi$.

Terbitkan perwakilan siri Fourier untuk $g(x)$.

Lakarkan $g(x)$ untuk julat $-3\pi < x < 3\pi$.

(12/25)

- (b) Gelombang segitiga diwakili oleh fungsi

$$h(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$$

untuk julat $-\pi < x < \pi$.

Terbitkan perwakilan siri Fourier untuk $h(x)$.

Lakarkan $h(x)$ untuk julat $-3\pi < x < 3\pi$.

(13/25)

4. (a) Persamaan difusi neutron 1-dimensi dengan suatu punca berbentuk

$$-D \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + K^2 D \phi(x) = Q \delta(x)$$

di mana $\phi(x)$ ialah fluks neutron, $Q \delta(x)$ ialah punca pada $x = 0$, D dan K adalah pemalar-pemalar.

Selesaikan persamaan ini dengan teknik transformasi Fourier.

(13/25)

$$\left[\text{Diberi } \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{b^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2b} e^{-ab} \right]$$

- (b) Persamaan gerakan untuk satu jisim m yang di biarkan jatuh dalam keadaan pegun di dalam udara di bawah pengaruh pecutan graviti g ialah

$$mx''(t) = mg - bx'(t)$$

...5/-

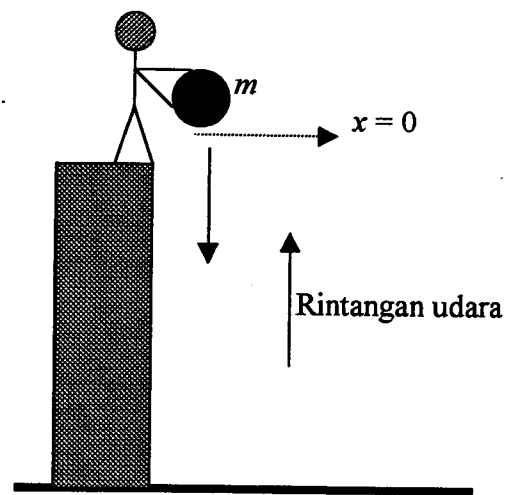
di mana $x(t)$ dan $x'(t)$ ialah sesaran dan halaju, dan sebutan terakhir menunjukkan kesan rintangan udara terhadap gerakan jisim (lihat Rajah 3 di bawah).

(i) Tuliskan syarat-syarat awal sistem ini

(2/25)

(ii) Selesaikan $x(t)$ dan $x'(t)$ dengan teknik transformasi Laplace.

(10/25)



Rajah 3

Diberi Jadual Transformasi Laplace seperti berikut:

Jadual Transformasi Laplace

$f(s)$	$F(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
$\frac{1}{s-k}$	e^{kt}
$\frac{1}{(s-k)^2}$	te^{kt}
$\frac{s}{s^2 - k^2}$	$\cosh kt$
$\frac{k}{s^2 - k^2}$	$\sinh kt$
$\frac{s}{s^2 + k^2}$	$\cos kt$
$\frac{k}{s^2 + k^2}$	$\sin kt$

- oooOOooo-