UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1997/98

September 1997

ZCT 211/2 - Analisis Vektor

Masa: [2 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab LAPAN soalan sahaja. Calon-calon boleh memilih menjawab kesemua soalan di dalam Bahasa Malaysia. Jika calon-calon memilih untuk menjawab di dalam Bahasa Inggeris, sekurang-kurangnya satu soalan wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1. Dua vektor dalam bentuk komponen adalah $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ dan $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$. Tuliskan ungkapan dalam bentuk komponen bagi $\vec{A}.\vec{B}$ dan $\vec{A} \times \vec{B}$.

(20/100)

Diberi $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ dan $\vec{B} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ hitung $|\vec{A}|$, $|\vec{B}|$, $\vec{A}.\vec{B}$ dan $\vec{A} \times \vec{B}$.

(50/100)

Maka carikan sudut di antara $\vec{A}$ *dan* $\vec{B}$.

(30/100)

2. Tuliskan ungkapan bagi $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})$ dalam bentuk komponen $\vec{A}$, $\vec{B}$ dan $\vec{C}$. Apakah makna $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})$ dalam geometri?

(20/100)

Nyatakan kembangan $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ dalam ungkapan $\vec{B}$ dan $\vec{C}$.

(20/100)

.../2-

Bagi $\vec{A} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{B} = 4\vec{i} - \vec{k}$ dan $\vec{C} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ hitung $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})$ dan $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$, dengan mengungkapkan $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ dalam bentuk komponen.

(60/100)

3. $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ adalah medan vektor dan ϕ adalah medan skalar. Nyatakan takrifan bagi $\nabla.\vec{A}$, $\nabla \times \vec{A}$, $\nabla\phi$ dan $\nabla^2\phi$.

(20/100)

Cari $\nabla\phi$ dan $\nabla^2\phi$ bagi $\phi = r^3 = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$.

(60/100)

Sahkan dengan menghitung secara eksplisit bahawa $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$.

(20/100)

4. Dua medan vektor adalah $\vec{A} = xz\vec{i} + (y - z)^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$ dan $\vec{B} = 2y\vec{i} + 4z\vec{j} + x^2z^2\vec{k}$. Hitung

$\nabla \times \vec{A}$,

(20/100)

$\nabla \times \vec{B}$,

(20/100)

$\vec{A} \times \vec{B}$ dan

(30/100)

$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B})$

(30/100).

5. Suatu zarah bergerak supaya pada masa t kedudukannya diberikan oleh $\vec{r}(t) = \alpha t\vec{i} + \frac{1}{2}\alpha t\vec{j} + (h - \frac{1}{2}\beta t^2)\vec{k}$. Cari vektor-vektor halaju dan pecutan: $\vec{v}(t)$ dan $\vec{f}(t)$.

(40/100)

.../3-

Ceritakan pergerakan zarah dan terangkan dengan terperincinya syarat awal yang boleh menghasilkan pergerakan ini. Di dalam penerangan ini sila ungkapkan halaju awal sebagai laju dan arah merujuk kepada paksi x.

(60/100)

6. Hitung kamiran dua ganda $\int f(x,y)dxdy$ melalui permukaan $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ di mana

(a) $f(x,y) = (x-y)^2$

(30/100)

(b) $f(x,y) = xy$

(30/100)

Hitung kamiran isipadu $\int_V f(\vec{r})dV$ di mana V adalah satu unit kubus $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$ dan $f(\vec{r}) = xyz$.

(40/100)

7. Nyatakan teorem Gauss dan teorem Stoke.

(40/100)

Dengan menggunakan teorem Gauss atau cara apapun hitung $\int_S \vec{F}.\vec{n}dS$ di mana

(a) $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ dan S adalah permukaan kubus $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$

(30/100)

(b) $\vec{F} = \nabla\phi$ di mana $\phi = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + z^2$ dan S adalah permukaan tertutup.

(30/100)

8. Nyatakan hukum Gauss yang menghubungkan medan graviti $\vec{F}(\vec{r})$ kepada ketumpatan jisim $\rho(\vec{r})$.

(20/100)

.../4-

Dengan menggunakan satu model yang mudah iaitu dengan menganggap bumi sebagai sfera berjejari R dan berketumpatan jisim ρ; maka, jisimnya adalah $M = 4\pi\rho R^3/3$. Dan dengan menganggap $\vec{F}(\vec{r})$ adalah berjejarian, tunjukkan bahawa magnitud F bagi $\vec{F}(\vec{r})$ pada jejari r adalah GMr/R^3 di bahagian dalam bumi dan GM/r^2 di bahagian luar bumi.

(60/100)

Lakarkan perlakuan F terhadap r.

(20/100)

9. Suatu cecair yang boleh mampat mempunyai ketumpatan $n(\vec{r},t)$ dan halaju pengaliran $\vec{J}(\vec{r},t)$. Gunakan hakikat bahawa setiap perubahan di dalam kuatiti cecair bagi sesuatu isipadu terbit dari net pengaliran masuk atau keluar yang berpunca dari $\vec{J}(\vec{r},t)$ untuk menunjukkan bahawa pengaliran cecair tersebut memenuhi persamaan keselanjaran $\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla.\vec{J} = 0$.

(40/100)

Tunjukkan seterusnya bahawa pengaliran bagi cecair yang tak mampat adalah $\nabla.\vec{J} = 0$.

(20/100)

Muncung bagi satu hos paip bersilinderan menguncup dari R_0 ke R_1. Dengan menganggap air merupakan suatu cecair tak mampat, cari persamaan yang memberikan nisbah halaju v_1/v_0 di tititk-titik R_1 dan R_0 dalam ungkapan R_1/R_0.

(40/100)

10. Ungkapan-ungkapan bagi ∇V dan $\nabla^2 V$ di dalam sistem koordinat berortogon am diberikan di bawah. Buktikan bahawa bagi koordinat silinderan terkutub (r, f, z) $h_r = 1$, $h_\phi = r$ and $h_z = 1$.

(20/100)

Cari bentuk am bagi keupayaan V(r) yang mematuhi $\nabla^2 V = 0$ dan bersandarkan r sahaja di dalam sistem koordinat silinderan.

(40/100)

.../5-

Cari medan elektrostatiknya $\vec{E} = -\nabla V$.

(20/100)

Gunakan hukum Gauss bagi elektrostatik untuk satu silinder yang panjang dan bercas seragam bagi menerangkan mengapa $\vec{E}$ mempunyai bentuk yang sedemikian.

(20/100)

Jika $ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2$ maka

$$\nabla V = \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial V}{\partial u_1}, \frac{1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial u_2}, \frac{1}{h_3}\frac{\partial V}{\partial u_3}\right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial V}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial V}{\partial u_3}\right)\right]$$

- oooOooo -