

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan  
Sidang Akademik 2000/2001

April/Mei 2001

**ZCT 218/4 - Kaedah Matematik**

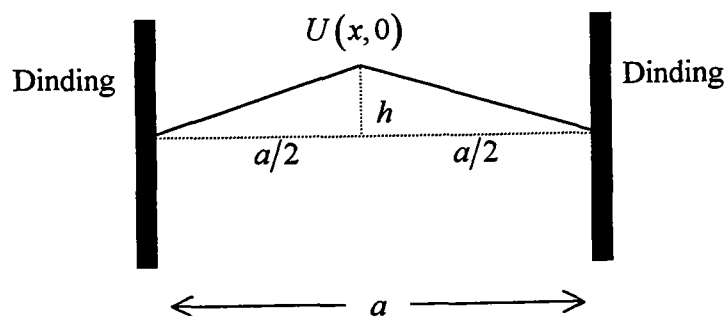
Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab kesemua LIMA soalan. Kesemuanya wajib dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. Satu tali yang tidak kenyal diregangkan, dan hujung-hujungnya diikat dengan ketat pada dinding. Panjang tali ini ialah  $a$  dan ketumpatan jisim per unit panjangnya ialah  $\sigma$ .

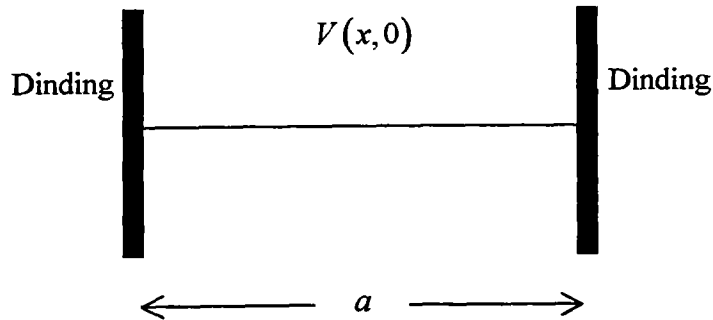
Pada masa  $t=0$ , keadaan tali dengan ketegangan  $T$  adalah seperti yang ditunjukkan pada Rajah 1.



Rajah 1

... 2/-

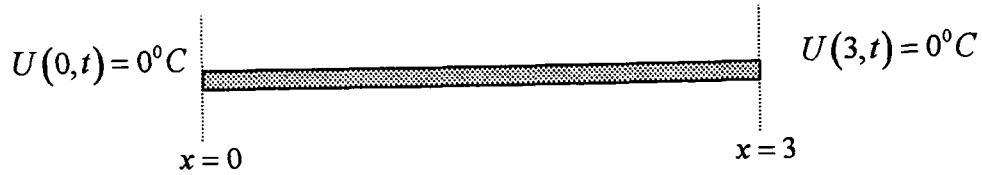
Tetapi halaju melintang pada tali pada  $t = 0$ , iaitu  $V(x, 0) = \left. \frac{dU(x, t)}{dt} \right|_{t=0}$  adalah seperti yang ditunjukkan pada Rajah 2.



Rajah 2

- (a) Tuliskan persamaan gelombang umum bagi sesaran melintang sistem tali yang bergetar,  $U(x, t)$ . (10/100)
- (b) Dengan kaedah pemisahan pembolehubah, terbitkan penyelesaian am bagi persamaan gelombang di dalam (a). (30/100)
- (c) Tuliskan syarat-syarat sempadan dan syarat-syarat awal bagi sistem tali yang dihuraikan di atas. (16/100)
- (d) Dengan jawapan-jawapan di dalam (b) dan (c), cari penyelesaian khusus bagi  $U(x, t)$ . (34/100)
- (e) Tentukan halaju melintang  $V(x, t)$  pada tali ini. (10/100)

2. Satu bar logam yang panjangnya 3 meter ditunjukkan seperti berikut:



Hujung-hujung logam ditetapkan pada  $0^{\circ}\text{C}$  seperti yang ditunjukkan, dan permukaan luar di sepanjang bar logam dibalut dengan penebat haba supaya tiada haba hilang melalui permukaan ini. Bahan logam dicirikan oleh

Pengkonduksian haba,  $\Omega = 2 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$

Haba tentu,  $C = 1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot (^{\circ}\text{C})^{-1}$

Ketumpatan,  $\rho = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Jika suhu pada bar logam bersandar terhadap panjang  $x$  dan masa  $t$  sahaja

- (a) Tulis persamaan haba bagi bar logam ini. (20/100)
- (b) Cari penyelesaian am bagi persamaan haba di dalam (a). (40/100)
- (c) Diberi suhu awal bar logam tersebut ialah

$$U(x, 0) = 5 \sin(4\pi x) - 3 \sin(8\pi x) + 2 \sin(10\pi x)$$

Dengan syarat-syarat sempadan dan syarat awal yang diberi, cari penyelesaian khusus suhu di sepanjang bar logam itu.

(40/100)

3. Fungsi Gamma,  $\Gamma(z)$ , mempunyai tiga takrifan yang berbentuk:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \quad (1)$$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \text{Re}(z) > 0 \quad (2)$$

... 4/-

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{yz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \quad (3)$$

Dengan menggunakan satu atau lebih takrifan-takrifan ini,

(a) Nilaikan  $I_1 = \int_0^{\infty} e^{-t} t^4 dt$  (30/100)

(b) Nilaikan  $I_2 = \int_0^{\infty} e^{-2t} t^8 dt$  (30/100)

(c) Buktikan  $I_3 = \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$  (40/100)

4. (a) (i) Satu gelombang dicirikan oleh  $f(x)$  di dalam julat  $-\pi \leq x \leq \pi$  yang mana

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi$$

Terbitkan perwakilan siri Fourier bagi  $f(x)$ . (40/100)

- (ii) Lakarkan gelombang di dalam (i) dalam julat  $-3\pi \leq x \leq 3\pi$  (10/100)

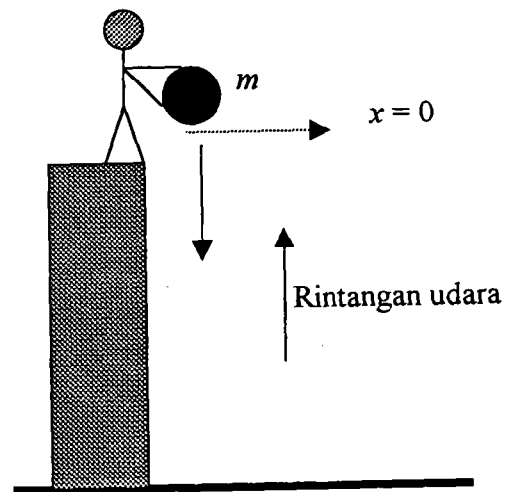
- (b) (i) Satu gelombang dicirikan oleh  $g(x)$  di dalam julat  $-\pi \leq x \leq \pi$ , yang mana

$$g(x) = \begin{cases} -\sin x, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Terbitkan perwakilan siri Fourier untuk  $g(x)$ . (40/100)

- (ii) Lakarkan gelombang di dalam (i) dalam julat  $-3\pi \leq x \leq 3\pi$ . (10/100)

5. Pada masa  $t=0$ , satu objek berjirim  $m$  dibiarkan jatuh dalam keadaan pegun di dalam udara di bawah pengaruh pecutan graviti  $g$ . Kesan rintangan udara terhadap gerakan adalah berkadar dengan halaju objek dan satu pemalar  $\gamma$ .



Biarkan  $x(t)$  dan  $x'(t)$  ialah sesaran dan halaju objek itu,

- (a) Terbitkan persamaan gerakan objek itu. (20/100)
- (b) Tuliskan syarat-syarat awal bagi gerakan objek ini. (10/100)
- (c) Selesaikan  $x(t)$  dan  $x'(t)$  dengan teknik transformasi Laplace. (70/100)

## LAMPIRAN

## Jadual transformasi Laplace

	$f(s)$	$F(t)$
1.	1	$\delta(t)$
2.	$\frac{1}{s}$	1
3.	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n$
4.	$\frac{1}{s-k}$	$e^{kt}$
5.	$\frac{1}{(s-k)^2}$	$te^{kt}$
6.	$\frac{s}{s^2-k^2}$	$\cosh kt$
7.	$\frac{k}{s^2-k^2}$	$\sinh kt$
8.	$\frac{s}{s^2+k^2}$	$\cos kt$
9.	$\frac{k}{s^2+k^2}$	$\sin kt$
10.	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$	$\exp(at) \cos kt$
11.	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$	$\exp(at) \sin kt$