UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1998/99

August/September 1998

ZCT 211/2 - Analisis Vektor

Masa: [2 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEMBILAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab LAPAN soalan sahaja. Calon-calon boleh memilih menjawab kesemua soalan dalam Bahasa Malaysia. Jika calon-calon memilih untuk menjawab dalam Bahasa Inggeris, sekurang-kurangnya satu soalan wajib dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. Buktikan dari takrifan $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$ bahawa $\vec{i}.\vec{i} = 1, \vec{i}.\vec{j} = 0$ dan $\vec{i}.\vec{k} = 0$ di mana $\vec{i}, \vec{j}$ dan $\vec{k}$ adalah unit vektor pada paksi-paksi x, y dan z. (20/100)

   Kemudian buktikan bahawa hasildarab skalar dengan $\vec{i}$ adalah operator unjuran terhadap paksi x, ia itu $\vec{i}.\vec{A} = A_x$. (10/100)

   Vektor $\vec{A}$ adalah $A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ di dalam satu set paksi dan adalah $A_{x'}\vec{i}' + A_{y'}\vec{j}' + A_{z'}\vec{k}'$ di dalam set paksi yang lain. Dengan menggunakan unjuran dengan $\vec{i}$ buktikan bahawa $A_x = c_{xx'}A_{x'} + c_{xy'}A_{y'} + c_{xz'}A_{z'}$ di mana $c_{xx'}$ adalah sudut kosinus di antara paksi-paksi x dan x' dan seterusnya. (30/100)

   Tuliskan keputusan yang sama bagi A_y dan A_z. (20/100)

   Nyatakan transformasi di antara skalar-skalar S dan S'. (20/100)

2. $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ adalah satu vektor medan dan ϕ adalah satu medan skalar. Berikan takrifan $\nabla.\vec{A}, \nabla\times\vec{A}, \nabla\phi$ dan $\nabla^2\phi$.

   (40/100)

...2/-

Dari takrifan yang diberikan buktikan $\nabla.(\nabla \times \vec{A}) = 0$ dan $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$ bagi apa-apa medan $\vec{A}$ dan ϕ.

(20/100)

Hitung $\nabla\phi$ dan $\nabla^2\phi$ bagi medan skalar $\phi(\vec{r}) = r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

(40/100)

3. Jika dua medan vektor diberikan sebagai $\vec{A} = 2xz^2\vec{i} + (y - z)\vec{j} - 3xyz\vec{k}$ dan $\vec{B} = y^3\vec{i} - 4z\vec{j} + x^2z^2\vec{k}$. Dapatkan $\nabla \times \vec{A}$, $\nabla \times \vec{B}$, $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B})$ dan $\nabla.(\vec{A} \times \vec{B})$.

(100/100)

4. Kedudukan satu zarah pada masa t diberikan oleh

$$\vec{r}(t) = a\cos(\omega t)\vec{i} + a\sin(\omega t)\vec{j} + ut\vec{k}$$

Cari ungkapan bagi halaju $\vec{v}(t)$ dan pecutan $\vec{f}(t)$.

(20/100)

Terangkan pergerakan $\vec{r}(t)$ dan cadangkan satu keadaan fizikal di mana satu zarah boleh bergerak di dalam keadaan begini.

(50/100)

Bagaimanakah patut anda ubahsuai cadangan susunan eksperimen yang dikemukakan di atas supaya lintasan zarah tersebut mengikuti

$$\vec{r}(t) = a\cos(\omega t)\vec{i} + a\sin(\omega t)\vec{j} + (ut + \beta t^2)\vec{k}$$

(30/100)

5. Hitung kamiran dua-ganda $\int f(x,y)dxdy$ yang melibatkan segi-empat $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$ di mana

(a) $f(x,y) = (x - y)^3$ (30/100)

(b) $f(x,y) = x^2y^3$ (30/100)

...3/-

Hitung kamiran isipadu $\int_V f(\vec{r})dV$ di mana V adalah satu kubik iaitu $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1$ dan $f(\vec{r}) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)\sin(\pi z)$.

(40/100)

6. Nyatakan teorem Gauss dan teorem Stokes dengan menerangkan setiap ungkapan atau sebutan yang anda gunakan di dalam penerangan tersebut.

(60/100)

Dengan menggunakan teorem Gauss atau dengan kaedah lain, hitung $\int_S \vec{F}.\vec{n}dS$ di mana $\vec{F} = x^4\vec{i} + y^3\vec{j} + z^2\vec{k}$ dan S adalah permukaan kubik $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a$.

(40/100)

7. Tuliskan persamaan keselanjaran dalam bentuk pembezaan yang memberi hubungan di antara ketumpatan ρ bagi suatu kauntiti yang abadi dengan arus keabadian $\vec{J}$.

20/100)

Tukarkan persamaan tersebut kepada bentuk kamiran dan terangkan kenapa persamaan tersebut juga memperihalkan keselanjaran.

(40/100)

Dua persamaan Maxwell adalah $\nabla.\vec{E} = \rho/\varepsilon_o$ dan $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \varepsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t$. Buktikan bahawa persamaan keselanjaran bagi cas adalah hasil dari persamaan-persamaan ini.

(40/100)

8. Persamaan Poisson bagi keupayaan kegravitian ϕ adalah

$$\nabla^2\phi = -4\pi G\rho$$

Dengan menganggap bahawa ρ adalah malar dan ϕ pula adalah simetrik secara sferaan (iaitu ianya bergantung kepada koordinat jejarian r sahaja) maka $\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right)$. Kamirkan persamaan Poisson sebanyak dua kali untuk menunjukkan bahawa penyelesaian amnya adalah

...4/-

$$\phi = -\frac{2\pi G\rho}{3}r^2 + \frac{K_1}{r} + K_2$$

di mana K_1 dan K_2 adalah pemalar-pemalar kamiran.

(60/100)

Cari medan gravitinya $\bar{F} = \nabla\phi = (F_r, 0, 0)$ dan terangkan dua ungkapan yang wujud di dalam F_r.

(40/100)

9. Adalah diketahui bahawa satu penyelesaian kepada persamaan peresapan

$$\frac{\partial n}{\partial t} = C\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

adalah fungsi

$$n(x,t) = \frac{1}{(4\pi Ct)^{1/2}}\exp(-x^2/4Ct)$$

Sahkan penyelesaian ini dengan kaedah penggantian semula.

(50/100)

Gunakan kamiran piawai $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2)dy = \pi^{1/2}$ untuk membuktikan bahawa $\int_{-\infty}^{\infty} n(x,t)dx = 1$ bagi semua nilai t.

(30/100)

Nyatakan sebab fisikal mengapa nilai kamiran tersebut tidak bersandarkan t.

(20/100)

10. Suatu keupayaan $V(\bar{r})$ mematuhi persamaan Poisson $\nabla^2 V = 0$ dan bersandarkan hanya kepada r dan cos θ, $V(\bar{r}) = f(r)\cos\theta$. Dengan menggantikan semula ke dalam persamaan Poisson terbitkan persamaan pembezaan yang dipatuhi oleh f (r).

(60/100)

...5/-

Cari dua nilai bagi n di mana $f(r) = r^n$ adalah penyelesaian bagi persamaan pembezaan tersebut.

(40/100)

Anda boleh menganggap bahawa

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)$$

- oooOooo -