UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan
Sidang Akademik 2000/2001

April/Mei 2001

ZCT 304/3 – Keelektrikan dan Kemagnetan

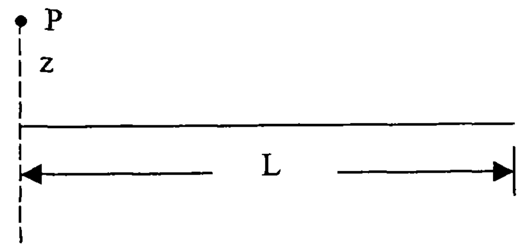
Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TUJUH** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan di Bahagian A, dan mana-mana EMPAT soalan di Bahagian B.

Bahagian A

1. Cari medan elektrik pada jarak z dari satu hujung garisan cas sepanjang L yang membawa cas garisan seragam λ coul/m. Apakah nilainya jika z >> L?



(10/100)

2. Bermula dengan hukum Gauss, terbitkan persamaan Poisson, $\vec{\nabla}^2 V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_o}$.

Dengan menggunakan persamaan Poisson, cari medan elektrik $\vec{E}(\vec{r})$ dan ketumpatan cas $\rho(r)$ jika keupayaan elektrik bagi suatu konfigurasi adalah

$$V(\vec{r}) = A\frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

di mana A dan λ adalah pemalar.

(10/100)

... 2/-

3. Satu silinder berjejari R dan sepanjang L membawa pemagnetan $\vec{M} = kr^2\hat{\phi}$ di mana k adalah pemalar. Cari

   (a) ketumpatan arus setara isipadu, $\vec{J}_e$.

   (b) ketumpatan arus setara permukaan, $\vec{\lambda}_e$ di semua permukaan silinder.

(10/100)

4. (a) Tuliskan keempat-empat persamaan Maxwell bagi bahan konduktor tanpa cas yang mempunyai pemalar kekonduksian σ.

   (b) Terbitkan persamaan gelombang bagi perambatan gelombangnya dalam sebutan E.

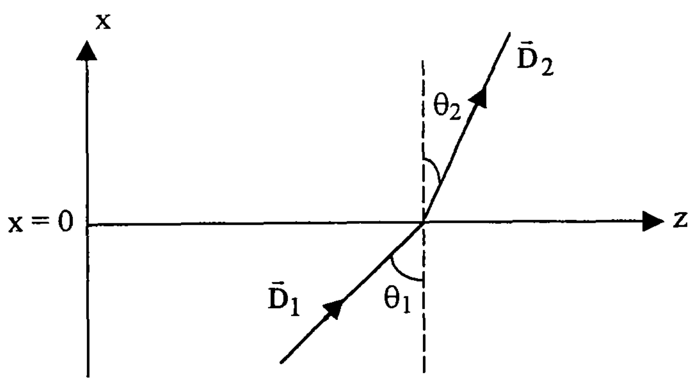
   (c) Jika $E = E_0 e^{i(kz-\omega t)}$, dapatkan nilai k.

(10/100)

Bahagian B

5. (a) Nyatakan <u>TIGA</u> syarat sempadan bagi sistem dielektrik.

   (b)



Vektor sesaran elektrik diruang x < 0 adalah

$$\vec{D}_1 = 1.5\hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z} \text{ Coul./m}^2$$

Jika ε_o dan $2.5\varepsilon_o$ adalah pemalar-pemalar ketelusan bagi kawasan x < 0 dan x > 0 masing-masing dan tiada cas bebas pada x = 0, tentukan

(i) $\vec{E}_2$ di kawasan x > 0, dan

(ii) sudut-sudut θ_1 dan θ_2.

(15/100)

.../3

6. (a) Tuliskan hukum Gauss bagi bahan dielektrik.

   (b) Suatu sfera dielektrik berjejari a mengandungi ketumpatan cas bebas $\rho_f = e^{-\alpha r}$ di mana α adalah pemalar.

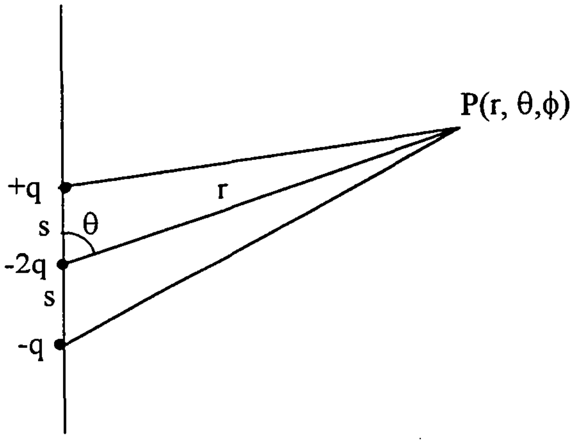
   (i) Dapatkan medan elektrik $\vec{E}$ di ruang $r \leq a$ dan $r \geq a$.

   (ii) Cari keupayaan elektrik di pusatan sfera dengan menggunakan takrifan keupayaan elektrik:

$$V = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

(15/100)

7. Konfigurasi kutub-empat elektrik yang linear mempunyai tatarajah seperti yang ditunjukkan di bawah:



Di sini jarak r » s. Tunjukkan bahawa keupayaan elektrik yang terhasil di titik P(r,θ,ϕ) adalah

$$V = \frac{qs^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1)$$

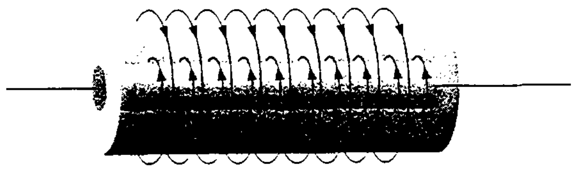
Dengan menggunakan koordinat sferaan dapatkan medan elektrik E_r, E_θ dan E_ϕ di P.

(15/100)

8. (a) Nyatakan hukum litar Ampere. Terangkan apa maksud hukum ini.

   (b) Dua solenoid yang panjang dan sepaksi setiap satu membawa arus I di arah yang berlawanan. Lihat rajah di bawah:

.../4



Solenoid bahagian dalam dengan jejari a mempunyai n_1 lilitan per meter dan solenoid bahagian luar dengan jejari b mempunyai n_2 lilitan per meter. Medan magnet $\vec{B}$ yang dihasilkan oleh solenoid yang membawa arus I adalah

$$\vec{B} = \mu_o nI$$

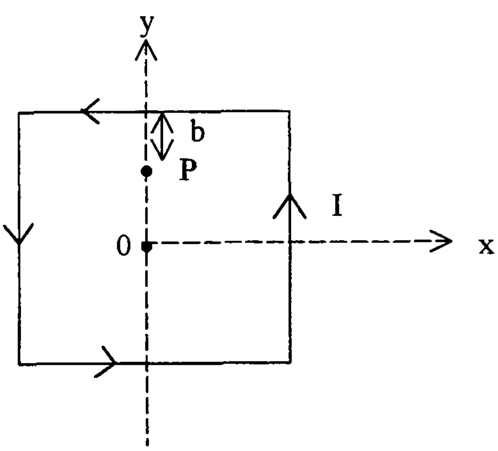
di mana n adalah bilangan lilitan per meter.

Cari $\vec{B}$:

(i) di bahagian dalam solenoid berjejari a.
(ii) di bahagian antara kedua solenoid, iaitu $a < r < b$.
(iii) di bahagian luar kedua-dua solenoid.

(15/100)

9.



Arus I mengalir di dalam satu dawai yang telah dibentuk supaya menjadi satu segiempat sama bersisi 2a. Lihat rajah di atas. Dengan menggunakan

$$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int \frac{I}{r} d\ell'$$

hitung vektor keupayaan magnet $\vec{A}$ di titik P.

(15/100)

10. (a) Buktikan persamaan keselanjaran

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$$

(b) Tunjukkan dengan menggunakan persamaan di atas bagaimana hukum Ampere

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \vec{J}_f$$

dapat dibetulkan supaya menjadi persamaan Maxwell yang keempat.

(15/100)

VECTOR DERIVATIVES

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$; $d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}}$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

VECTOR IDENTITIES

Triple Products

(1) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

Product Rules

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$

(6) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

(7) $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$

(8) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$

Second Derivatives

(9) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

(11) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

FUNDAMENTAL THEOREMS

Gradient Theorem : $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

Divergence Theorem : $\int (\nabla \cdot \mathbf{A})\, d\tau = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$

Curl Theorem : $\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$

- oooOOooo -