UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1986/87

EUM 202/3 - Matematik IV

Tarikh: 8 April 1987 Masa: 9.00 pagi - 12.00 t/hari
(3 Jam)

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 13 mukasurat berserta 2 lampiran yang bercetak dan ENAM (6) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

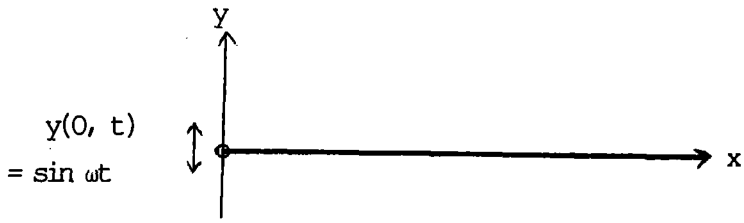
Jawab LIMA (5) soalan. Semua soalan mesti dijawab di dalam Bahasa Malaysia. Setiap soalan dinilai atas 100 markah dan markah yang diperuntukkan bagi setiap ceraian soalan dinyatakan di dalam kurungan ( ).

Buku sifir matematik disediakan. Rumus-rumus yang diperlukan disertakan di dalam lampiran. Mesin hitung boleh digunakan dalam pengiraan. Semua kerja mengira yang utama mesti ditunjukkan dengan jelas.

Sila tuliskan nombor-nombor soalan yang dijawab pada kulit buku jawapan.

...2/-

1. (a) Suatu tali yang panjangnya tak terhingga diregangkan secara mengufuk, pada mulanya, di sepanjang paksi x seperti ditunjukkan di dalam gambarajah berikut:



Gambarajah 1

Selain daripada itu, tali itu pegun pada mulanya. Input bagi t > 0 adalah suatu gerakan sinusoidal pada titik x = 0. Katakan y(x, t) menghuraikan gerakan mencancang tali itu dan y(x, t) memenuhi persamaan gelombang berikut:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x, t)$$

iaitu c adalah suatu pemalar positif.
Oleh sebab tali itu tak terhingga panjang,

$$y(\infty, t) = 0.$$

(i) Berikan sebab mengapa y(x, 0) = 0.

(5 markah)

(ii) Berikan sebab mengapa y(0, t) = sin ωt.

(5 markah)

(iii) Berikan sebab mengapa $\left.\frac{\partial}{\partial t} y(x, t)\right|_{t=0} = 0$.

(5 markah)

(iv) Cari suatu rumus bagi y(x, t), dengan menggunakan jelmaan Laplace.

(30 markah)

...3/-

(b) Kamiran konvolusi yang mempunyai banyak penggunaan di dalam masalah-masalah kejuruteraan ditakrifkan seperti berikut:

$$(g*h)\ (t) := \int_{-\infty}^{\infty} g(u)h(t-u)du.$$

(i) Katakan g(t) dan h(t) tertakrif hanya bagi $t \geqslant 0$ dan $g(t) = h(t) = 0$ bagi $t < 0$. Tunjukkan bahawa jelmaan Laplace bagi g*h ialah:

$$L((g*h)\ (t)) = G(s)H(s)$$

iaitu $L(g(t)) = G(s)$ dan $L(h(t)) = H(s)$.

(15 markah)

(ii) Jika $g(t) = h(t) = 0$ bagi semua $t < 0$, tunjukkan bahawa

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u)h(t-u)du = \int_{0}^{t} g(u)h(t-u)du.$$

(10 markah)

(iii) Katakan f(t) adalah suatu fungsi input di dalam suatu sistem kejuruteraan yang memenuhi persamaan pembezaan-kamiran berikut:

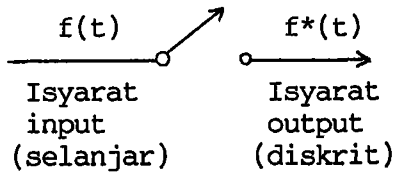
$$f(t) + f'(t) = t + \int_{0}^{t} f(u)e^{-(t-u)}du \ ; \ f(0) = 0.$$

Cari fungsi input f(t).

(30 markah)

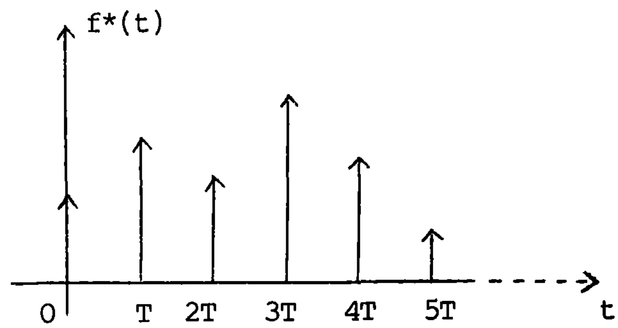
...4/-

2. (a)



Gambarajah 2

Gambarajah di atas mewakili suatu suis pensampel yang menutup setiap T saat untuk memasukkan isyarat input f(t). Penghampiran output bagi pensampel itu boleh diwakili oleh gambarajah berikut:



Gambarajah 3

(i) Tuliskan suatu ungkapan matematik yang mungkin bagi isyarat output tersampel f*(t).

(5 markah)

(ii) Cari jelmaan Laplace bagi f*(t).

(15 markah)

...5/-

(b) Di dalam suatu sistem digit, perhubungan di antara isyarat input dan isyarat output dapat dihuraikan oleh persamaan rekursi berikut:

$$(*) \quad y(t) - 2y(t-T) = x(t) \ , \ t = nT \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

iaitu $y(t)$ adalah isyarat output, $x(t)$ isyarat input dan T kala pensampelan serta syarat awal $y(-T) = x(0) = 0$.
Jika input bagi sistem digit itu ialah:

$$x(t) = t/T \ (T > 0),$$

(i) cari jelmaan z bagi kedua-dua belah persamaan rekursi (*);

(10 markah)

(ii) kemudian tunjukkan bahawa jelmaan z bagi isyarat output $y(t)$ ialah:

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z-1)^2} \ ;$$

(10 markah)

(iii) cari isyarat output $y(t)$ dan tahkikkan bahawa $y(t)$ memenuhi syarat awal $y(-T) = 0$.

(25 markah)

...6/-

(c) Di dalam suatu sistem data tersampel, fungsi isyarat input pada masa t adalah seperti berikut:

$$f(t) = t\cosh t \quad , \quad t = 0, T, 2T, \ldots$$

iaitu T adalah kala pensampelan. Cari suatu rumus jelmaan z bagi f(t) di dalam bentuk tertutup.

(Petunjuk: $\cosh t = \frac{1}{2}(e^{t} + e^{-t})$)

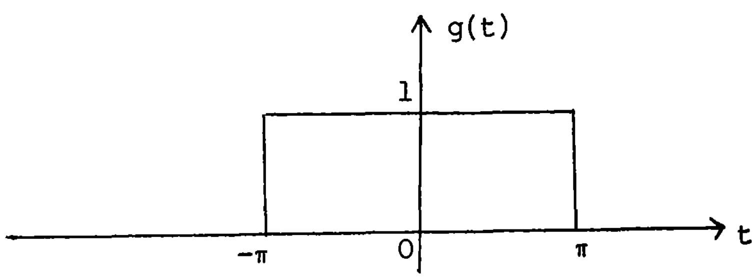
(35 markah)

3. (a) Dengan menggunakan jadual jelmaan sinus yang dilampirkan, nilaikan kamiran berikut:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin 4x}{(4x^2 + 1)^3}\, dx \,.$$

(25 markah)

(b) Di dalam suatu sistem komunikasi, isyarat unit denyut dinyatakan oleh gambarajah berikut:



Gambarajah 4

...7/-

(i) Tunjukkan bahawa spektrum amplitud bagi isyarat $g(t)$ ialah:

$$G(j\omega) = 2\pi \text{ sinc } \omega \qquad (j = \sqrt{-1})$$

iaitu ω adalah frekuensi isyarat dan sinc $\omega := \frac{\sin \pi\omega}{\pi\omega}$.

(15 markah)

(ii) Lakarkan spektrum itu.

(10 markah)

(c) Suatu sistem fizikal memenuhi persamaan pembezaan separa berikut:

$$(*) \quad 2xg(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} g(x,t) + \frac{\partial}{\partial t} g(x,t) = \delta(t-t_o) \quad (x>0, -\infty<t<\infty),$$

$g(0,t) = 0$ dan $\delta(t-t_o)$ suatu fungsi unit impuls; t_o adalah suatu pemalar positif.

(i) Berikan satu sebab mengapa kaedah jelmaan Laplace terhadap t tidak boleh digunakan untuk mencari $g(x,t)$.

(5 markah)

(ii) Cari jelmaan Fourier bagi kedua-dua belah persamaan (*).

(10 markah)

(iii) Tunjukkan bahawa jelmaan Fourier bagi $g(x,t)$ ialah:

$$G(x,j\omega) = e^{-x^2} \int_0^x e^{-j\omega t_o} e^{j\omega(v-x)} e^{v^2} dv .$$

(25 markah)

...8/-

(iv) Tunjukkan bahawa fungsi isyarat ialah:

$$g(x,t) = e^{-x^2} \int_0^x \delta(t-t_o+v-x)\, e^{v^2}\, dv.$$

(10 markah)

4. (a) Jelmaan Hilbert bagi suatu fungsi isyarat g(t) ditakrifkan seperti berikut:

$$\hat{g}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(u)}{\pi(t-u)}\, du$$

iaitu $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(u)}{\pi(t-u)}\, du$ adalah sebenarnya nilai prinsipal Cauchy.

(i) Cari spektrum amplitud bagi $\hat{g}(t)$.

(5 markah)

(ii) Cari fungsi pindah (di dalam suatu sistem linear tak berubah terhadap masa) yang ditakrifkan seperti berikut:

$$Q(j\omega) := \frac{\text{spektrum amplitud bagi } \hat{g}(t)}{\text{spektrum amplitud bagi } g(t)}\,.$$

(5 markah)

(iii) Tunjukkan bahawa proses jelmaan Hilbert membabitkan suatu alat rekaan yang menghasilkan anjakan fasa $-\pi/2$ bagi semua isyarat input dengan frekuensi-frekuensi positif dan anjakan fasa $+\pi/2$ bagi frekuensi-frekuensi negatif.

(10 markah)

...9/-

(iv) Cari jelmaan Hilbert bagi isyarat $g(t) = \pi\delta(t)$.
(Petunjuk: $\int_b^c f(u)\delta(u-a)du = f(a),\ b < a < c.$)

(10 markah)

(v) Dengan menggunakan jelmaan kosinus dan jelmaan sinus, tunjukkan bahawa jelmaan Hilbert bagi isyarat $g(t) = 1/(1+t^2)$ ialah:

$$\hat{g}(t) = t/(1+t^2)\,.$$

(20 markah)

(b) Katakan

Σ : suatu abjad

Σ^*: suatu set yang mengandungi rentetan-rentetan huruf yang terhingga (iaitu perkataan) daripada Σ

$P(\Sigma^*)$: set kuasa bagi Σ^* iaitu $P(\Sigma^*)$ mengandungi semua bahasa daripada Σ^*.

Bagi $A, B \in P(\Sigma^*)$, set hasil darab AB ditakrifkan seperti berikut:

$$AB := \{\omega_1 \omega_2 : \omega_1 \in A \text{ dan } \omega_2 \in B\}$$

iaitu jika ω_1 = sa dan ω_2 = ya, maka $\omega_1 \omega_2$ = saya; khususnya jika ε adalah perkataan kosong, εsa = saε = sa.

Jika $\Sigma = \{a, b\}$, $A = \{ab, ba\}$ dan $B = \{\varepsilon, bb\}$, cari:

(i) $\Sigma^2 (=\Sigma\Sigma)$ (5 markah)

(ii) BA (5 markah)

(iii) $B\{\varepsilon\}$ (5 markah)

(iv) $B\ \emptyset$ (iaitu $\emptyset$ adalah set kosong) (5 markah)

(v) $\Sigma^2 \oplus B$. (5 markah)

...10/-

(c) Di dalam analisis berangka, kaedah Runge-Kutta merupakan suatu rumus yang paling berguna untuk mencari penyelesaian-penyelesian berangka (interpolasi) bagi masalah-masalah nilai awal seperti $y' = f(x,y)$, $y(x_o) = y_o$.

(i) Tuliskan suatu rumus untuk kaedah Runge-Kutta peringkat kedua.

(10 markah)

(ii) Tuliskan nilai-nilai pemalar supaya kaedah Runge-Kutta peringkat kedua diturunkan kepada kaedah Euler terubahsuai.

(5 markah)

(iii) Dengan menggunakan kaedah Euler terubahsuai, cari penyelesaian berangka y(1.5) bagi persamaan pembezaan berikut:

$$y'(x) = 1 - \frac{y}{x} \quad , \quad y(1.0) = 1.500.$$

(10 markah)

5. (a) Katakan $m|n$ bermaksud m adalah suatu faktor bagi n iaitu m boleh membahagi n.

(i) Tunjukkan bahawa $(\mathbb{Z}^+ , |)$ adalah suatu poset, iaitu $\mathbb{Z}^+$ adalah set integer positif.

(20 markah)

(ii) Lakarkan gambarajah Hasse bagi poset berikut:

$$(\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}, |)$$

dan berikan sebab mengapa poset ini adalah suatu kekisi.

(20 markah)

...11/-

(iii) Katakan

$$x+y := \text{batas atas terkecil bagi } \{x, y\}$$
$$x.y := \text{batas bawah terbesar bagi } \{x, y\}.$$

Berdasarkan kekisi $(\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}, |)$, nilaikan:

$$10+15, \quad 10.15, \quad 5+6, \quad 5.6, \quad 3.6.$$

(5x2 markah)

(b) (i) Buktikan teorem De Morgan (di dalam versi aljabar Boolean) yang dinyatakan seperti berikut:

$$\overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}.$$

(25 markah)

(ii) Mudahkan kepada bentuk yang paling ringkas (minimumkan) ungkapan aljabar Boolean berikut:

$$(a+b)(a+\bar{b}\ \bar{a})c + \overline{\bar{a}(b+\bar{c})} + \bar{a}b + abc\ .$$

(25 markah)

6. (a) Di dalam suatu sistem kejuruteraan, masalah nilai awal dinyatakan seperti berikut:

$$(*) \quad y'(x) = y + x \quad , \quad y(0) = 0.$$

(i) Tunjukkan bahawa penyelesaian tepat ialah:

$$y(x) = e^x - x - 1.$$

(15 markah)

...12/-

(ii) Cari penyelesaian-penyelesaian berangka pada $x = 0.2$, 0.4 bagi persamaan (*) dengan menggunakan rumus kaedah peramal-pembetul Euler yang dinyatakan seperti berikut:

$$y(x_n) = y(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2}h\{f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_n, y_n^*)\}$$

iaitu nilai bantu (peramal) $y_n^* = y(x_{n-1}) + hy'(x_{n-1})$ dan $n = 1, 2, 3, \ldots.$ Berikan jawapan anda tepat kepada 3 titik perpuluhan.

(30 markah)

(iii) Cari nilai-nilai ralat mutlak di antara penyelesaian tepat dan penyelesaian berangka pada $x = 0.2, 0.4$. Berikan jawapan anda tepat kepada 3 titik perpuluhan.

(5 markah)

(b) Katakan suatu fungsi selanjar $y(x)$ boleh dihampirkan dengan interpolasi oleh suatu fungsi linear cebis demi cebis.

(i) Dengan menggunakan penghampiran fungsi itu, tunjukkan petua trapezoid yang dinyatakan seperti berikut:

$$\int_a^b y(x)dx \approx \tfrac{1}{2}h(y_o + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$$

iaitu $y_n = y(x_n)$, $x_n = x_o + nh$, $h = \frac{b-a}{n}$, $b = x_n$, $a = x_o$.

(10 markah)

(ii) Tunjukkan bahawa ralat pangkasan anggaran bagi petua trapezoid ialah:

$$\varepsilon = -\frac{1}{12} h^3 (y_o'' + y_1'' + \ldots + y_{n-1}'')$$

iaitu $y''(x_n) = y_n''$.

(25 markah)

(iii) Jika $y''(x)$ adalah selanjar dan terbatas bagi $a \leqslant x \leqslant b$, tunjukkan bahawa:

$$\varepsilon = -\frac{(b-a)^3}{12 n^2} y''(\xi) \quad , \quad a < \xi < b$$

dan tuliskan ungkapan-ungkapan bagi nilai maksimum ε dan nilai minimum ε.

(15 markah)

-oooOooo-

I. Jadual jelmaan Laplace

$f(t)$	$F(s) = L(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
$\delta(t - a)$	e^{-as}
$t^n \; (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\sin \omega t$	$\omega/(s^2 + \omega^2)$
$g^{(n)}(t)$	$s^n G(s)-s^{n-1}g(0)-s^{n-2}g'(0)\ldots-sg^{(n-2)}(0)+g^{(n-1)}(0)$
$g(t-\tau)\; u(t-\tau)$	$e^{-s\tau}\; G(s)$
$e^{-at}g(t)$	$G(s + a)$

II. Jelmaan z

$$Z(t) = Tz/(z - 1)^2$$

$$Z(f(t - mT)) = z^{-m}\; Z(f(t))$$

$t = 0, T, 2T, \ldots$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, T ialah kala pensampelan.

III. Jelmaan sinus

$$S(t(1+at)e^{-at}) = 8a^3\omega/(\omega^2 + a^2)^3 \quad , \quad a > 0$$

$$S(e^{-at}) = \omega/(\omega^2 + a^2) \quad , \quad a > 0$$

IV. Jelmaan kosinus

$$C\left(\frac{a}{t^2+a^2}\right) = \frac{\pi}{2}\, e^{-a\omega} \quad , \quad a > 0$$

v. Jadual jelmaan Fourier

$g(t)$	$G(j\omega) = F(g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt$
$1/t^n \ (n = 1, 2, \ldots)$	$\frac{(j\omega)^{n-1}}{(n-1)!} \ \pi j \ (-\text{sgn}\ \omega)$
	iaitu $\text{sgn}\ \omega = \begin{cases} +1, & \omega > 0 \\ -1, & \omega < 0 \end{cases}$
$\delta(t - t_o)$	$e^{-j\omega t_o}$
$h^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n H(j\omega)$
$h(t + \tau)$	$e^{j\tau\omega} H(j\omega)$