UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua

Sidang 1987/88

EUM 202 Matematik Kejuruteraan IV

Tarikh: 15 April 1988

Masa: 9.00 pagi - 12.00 t/hari
(3 jam)

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 11 muka surat berserta lampiran (1 muka surat) yang bercetak. Kesemuanya terdapat 6 soalan.

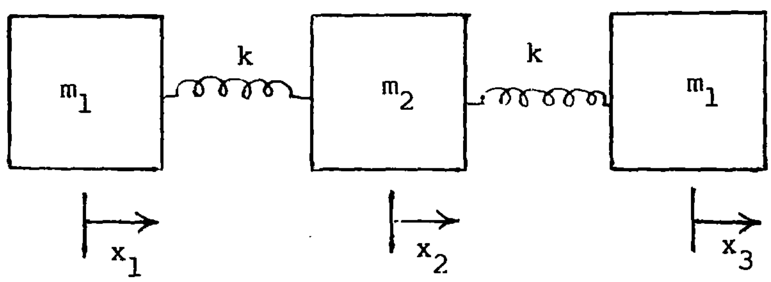
Jawab LIMA (5) soalan sahaja. Kesemua soalan mestilah dijawab di dalam Bahasa Malaysia. Setiap soalan dinilai di atas 100 markah dan markah yang diperuntukkan bagi setiap ceraian soalan ditunjukkan di dalam kurungan (.).

Buku sifir matematik disediakan. Mesin hitung boleh digunakan di dalam sebarang pengiraan. Kesemua kerja mengira mesti ditunjuk dengan jelas.

"Education... has produced a vast population able to read but unable to distinguish what is worth reading". (G.M. Trevelyan)

...2/-

1. Pertimbangkan satu sistem yang mempunyai tiga jisim di atas paksi-x yang dihubungi dengan pegas (spring) seperti di dalam rajah di bawah.



Daya-daya pegas diandai mematuhi Hukum Hooke dan jisim dikekang di atas paksi-x. Sesaran-sesaran adalah x_1, x_2 dan x_3. Persamaan-persamaan pembezaan untuk sistem di atas adalah:-

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k}{m_1}(x_1 - x_2)$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{k}{m_2}(x_2 - x_1) - \frac{k}{m_2}(x_2 - x_3)$$

$$\ddot{x}_3 = -\frac{k}{m_1}(x_3 - x_2)$$

Jisim-jisim di atas adalah bergetar.

...3/-

(a) Dengan menggunakan $x_i(t) = x_{io}e^{jwt}$, $(i = 1,2,3,\quad j = \sqrt{-1})$, dapatkan sistem

$$\begin{bmatrix} k/m_1 & -k/m_1 & 0 \\ -k/m_2 & 2k/m_2 & -k/m_2 \\ 0 & -k/m_1 & k/m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = w^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(10%)

(b) Dapatkan nilai-nilai eigen bagi sistem di atas.

(20%)

(c) Dapatkan vektor-vektor eigen bagi sistem di atas.

(40%)

(d) Bagi setiap nilai eigen (dan vektor eigen yang sepadan) perihalkan apa yang sedang berlaku kepada sistem jisim-jisim di atas.

(30%)

...4/-

2. Di dalam satu rangkaian perhubungan yang hanya mempunyai satu talian, persamaan pembezaan yang memerihalkan kesesakan talian tunggal tersebut adalah:-

$$\dot{p}_o(t) = -\lambda p_o(t) + p_1(t)$$

$$\dot{p}_1(t) = \lambda p_o(t) - p_1(t)$$

yang mana λ adalah keamatan trafik perhubungan yang melalui talian tersebut, $p_o(t)$ adalah kebarangkalian talian itu tak sibuk pada masa t dan $p_1(t)$ adalah kebarangkalian talian itu sibuk pada masa t. Andaikan syarat-syarat awal adalah $p_o(0) = \alpha$, $p_1(0) = \beta$.

(a) Dengan menggunakan jelmaan Laplace

$$\pi_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} p_i(t)dt \qquad (i = 0,1)$$

tulis semula persamaan pembezaan di atas.

(10%)

(b) Gunakan kaedah penghapusan Gauss untuk memperolehi

$$\pi_1(s) = \frac{\beta s + \beta\lambda + \alpha\lambda}{s(s + \lambda + 1)}$$

(20%)

...5/-

(c) Dari (b) dapatkan rumus untuk $p_1(t)$.

(40%)

(d) Dari (c) dapatkan rumus untuk $p_o(t)$.

(Petunjuk : kebarangkalian asas)

(15%)

(e) Jika diberi bahawa $\lambda = 2$, dan pada $t = 0$ talian tersebut tidak sibuk, apakah kebarangkalian talian itu tak sibuk pada masa $t = 2$?

(15%)

3. (a) Di dalam mekanik cakerawala, persamaan Kepler adalah

$$y = x - e \sin x$$

yang mana y adalah anomali min sesebuah planet, x adalah anomali eksentriknya dan e adalah keeksentrikan orbitnya. Diberi bahawa $y = 1$ dan $e = 0.5$, cari x di dalam selang $[0, \pi]$ tepat ke empat titik perpuluhan.

(30%)

...6/-

(b) Voltan $e = e(t)$ di dalam satu litar elektrik mematuhi hubungan

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e(t)$$

yang mana R adalah rintangan, L adalah kearuhan dan i adalah arus. Arus di dalam litar tersebut diukur pada beberapa nilai t, iaitu masa, dan didapati

t	2.00	2.01	2.02	2.03	2.04
i(t)	2.10	2.12	2.14	2.18	2.24

Jika diberi $L = 0.5$ dan $R = 0.2$, anggarkan nilai-nilai e(t) pada t = 2.00, 2.01, 2.02, 2.03 dan 2.04, dengan menggunakan rumus tiga-titik yang sesuai.

Rumus-rumus tiga-titik:-

A. $$f'(x_o) = \frac{1}{2h}[-3f(x_o)-4f(x_o + h)-f(x_o + 2h)]+ \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_o)$$

$$x_o < \xi_o < x_o + 2h$$

B. $$f'(x_o) = \frac{1}{2h}[f(x_o + h)-f(x_o - h)]- \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_1)$$

$$x_o - h < \xi_1 < x_o + h$$

(40%)

...7/-

(c) Jadual berikut adalah bilangan penduduk Kampung Cabang Empat Tok Wan Naim dari tahun 1960 hingga tahun 1980:-

Tahun	1960	1970	1980
Penduduk	10	15	25

Guna kaedah interpolasi Lagrange untuk menganggar bilangan penduduk pada tahun 1990 kelak.

Polinomial Lagrange

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x)$$

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

(30%)

4. (a) Katalah satu masyarakat mempunyai $x(t)$ individu pada masa t. Daripada $x(t)$ individu ini terdapat $y(t)$ individu yang bersikap liberal. Satu model yang menghubungkaitkan $x(t)$ dan $y(t)$ adalah (model Roshevsky)

$$\dot{x}(t) = (b - d)\ x(t)\ ;\ \dot{y}(t) = (b - d)\ y(t) + rb(x(t)-y(t))$$

yang mana b, d dan r adalah pemalar-pemalar.

(i) Dengan penggantian $p(t) = y(t)/x(t)$ tunjukkan bahawa persamaan-persamaan di atas dapat diturunkan kepada
(*) $\dot{p}(t) = rb(1 - p(t))$

(15%)

(ii) Andaikan $p(o) = 0.01$, $b = 0.02$, $d = 0.015$ dan $r = 0.1$. Gunakan kaedah Euler untuk menganggarkan nilai $p(t)$ dari $t = 0$ hingga $t = 5$ apabila $h = 1$ tahun.

(35%)

(iii) Selesaikan persamaan pembezaan (*) di atas secara tepat dan bandingkan nilai-nilai yang didapati dari (ii) dengan nilai-nilai tepat.

$$[\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n\ ,\ y_n) \qquad n = 0, 1, \ldots\ ]$$

...9/-

(b) Bincangkan perbezaan di antara kaedah Euler dan kaedah Euler diperbaiki (Kaedah Heun).

(20%)

5. (a) Jelmaan Fourier ditakrifkan sebagai:-

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{jwt}dt \quad , \quad j = \sqrt{-1}$$

(i) Bagi fungsi genap f(t) tunjukkan bahawa jelmaan Fourier akan menjadi jelmaan kosinus Fourier, $F_k(w)$.

(15%)

(ii) Bagi fungsi ganjil g(t) tunjukkan bahawa jelmaan Fourier akan menjadi jelmaan sinus Fourier, G(w) .

(15%)

(iii) Bagi fungsi e^{-t} $(t \geq 0)$, cari jelmaan Fourier, dan jelmaan kosinus Fourier. Lakarkan fungsi $e^{-t}(t \geq 0)$ dan jelmaan kosinus Fouriernya.

(40%)

...10/-

(b) Cari nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen bagi matriks berikut:-

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(30%)

6. (a) <u>Algoritma Penggantian ke Depan</u>. Satu sistem linear dipanggil segitiga-bawah jika $a_{ij} = 0$ bagi $j > i$, iaitu:-

$$\begin{array}{llllll}
a_{11}x_1 & & & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 & + \; a_{22}x_2 & & & & = b_2 \\
a_{31}x_1 & + \; a_{32}x_2 & + \; a_{33}x_3 & & & = b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
a_{n-1,1}x_1 & + \; a_{n-1,2}x_2 & + \; a_{n-1,3}x_3 & + \dots + \; a_{n-1,n-1}x_{n-1} & & = b_{n-1} \\
a_{n1}x_1 & + \; a_{n2}x_2 & + \; a_{n3}x_3 & + \dots + \; a_{n,n-1}x_{n-1} & + \; a_{nn}x_n & = b_n
\end{array}$$

Cipta satu algoritma untuk menyelesaikan sistem di atas apabila unsur-unsur penjuru, a_{kk} $(k = 1,2,\dots,n)$ tidak sifar.

(50%)

(b) Jelmaan-z bagi f(k) ditakrifkan sebagai:-

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

(i) Cari F(z) bagi $f(k) = e^{jwk}$, $j = \sqrt{-1}$, $k = 0,1,2,...$

(20%)

(ii) Dengan menggunakan $e^{jwx} = \cos wx + j \sin wx$, dapatkan jelmaan-z bagi sin(kw) dan cos (kw).

(30%)

-oooOooo-

LAMPIRAN I

Jadual Untuk Beberapa Jelmaan Laplace

	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
1	$1/s$	1
2	$1/s^2$	t
3	$1/s^n, \quad (n = 1, 2, \cdots)$	$t^{n-1}/(n-1)!$
4	$1/\sqrt{s}$	$1/\sqrt{\pi t}$
5	$1/s^{3/2}$	$2\sqrt{t/\pi}$
6	$1/s^a \quad (a > 0)$	$t^{a-1}/\Gamma(a)$
7	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\dfrac{1}{(s-a)^n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$	$\dfrac{1}{(n-1)!} t^{n-1}e^{at}$
10	$\dfrac{1}{(s-a)^k} \quad (k > 0)$	$\dfrac{1}{\Gamma(k)} t^{k-1}e^{at}$
11	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$	$\dfrac{1}{(a-b)}(e^{at} - e^{bt})$
12	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$	$\dfrac{1}{(a-b)}(ae^{at} - be^{bt})$
13	$\dfrac{1}{s^2 + \omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega} \sin \omega t$
14	$\dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
15	$\dfrac{1}{s^2 - a^2}$	$\dfrac{1}{a} \sinh at$
16	$\dfrac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$
17	$\dfrac{1}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega} e^{at} \sin \omega t$
18	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$e^{at} \cos \omega t$
19	$\dfrac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^2}(1 - \cos \omega t)$
20	$\dfrac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^3}(\omega t - \sin \omega t)$
21	$\dfrac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
22	$\dfrac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\dfrac{t}{2\omega} \sin \omega t$
23	$\dfrac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega}(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$
24	$\dfrac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\dfrac{1}{b^2 - a^2}(\cos at - \cos bt)$