UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang Akademik 1987/88

EUM 201 Matematik III

Tarikh: 28 Oktober 1987 Masa: 9.00 pagi - 12.00 tengahari

(3 Jam)

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 11 muka surat bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab LIMA(5) soalan. Semua soalan mesti dijawab di dalam Bahasa Malaysia. Setiap soalan dinilai atas 100 markah dan markah yang diperuntukkan bagi tiap-tiap ceraian soalan ditunjukkan di dalam kurungan ( ).

Buku sifir matematik disediakan. Mesin hitung boleh digunakan dalam komputasi. Semua kerja mengira mesti ditunjukkan dengan jelas.

1. (a) (i) Tuliskan $(2 - j)^{j+1}$, $j = \sqrt{-1}$, di dalam bentuk $R(\cos \alpha + j \sin \alpha)$ supaya ia boleh disimpan di dalam komputer.

(20%)

(ii) Katakan $z = x + jy$, $j = \sqrt{-1}$ dan $\sin z = u(x, y) + jv(x, y)$. Tunjukkan bahawa $u(x, y)$ dan $v(x,y)$ adalah harmonik.

(20%)

(b) Pemetaan (transformasi) mensebentuk adalah penting di dalam matematik kejuruteraan. Pemetaan (transformasi) yang ditakrif oleh suatu fungsi analisis $f(z)$ adalah mensebentuk kecuali pada titik yang mana terbitan $f'(z) = 0$.

(i) Tunjukkan bahawa fungsi eksponen

$$w = e^z$$

menakrifkan suatu pemetaan (transformasi) yang mensebentuk pada seluruh satah z.

(10%)

...3/-

(ii) Cari dan lakarkan imej di bawah pemetaan $w = e^z$, bagi setiap rantau berikut $(z = x + jy)$:

(*) $1 \leqslant x \leqslant 2$ dan $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$

(15%)

(**) jalur asasi iaitu $-\pi < y \leqslant \pi$

(15%)

(***) $x \geqslant 0$ dan $0 \leqslant y \leqslant \pi$

(20%)

2. (a) Di dalam aerodinamik dan mekanik bendalir, fungsi-fungsi ϕ dan ψ daripada fungsi analisis $f(z) = \phi + j\psi$ dipanggil upaya halaju dan fungsi aliran masing-masing. Jika di dalam suatu sistem, upaya halaju adalah seperti berikut:

$$\phi = x^2 + 4x - y^2 + 2y ,$$

cari

(i) fungsi aliran ψ .

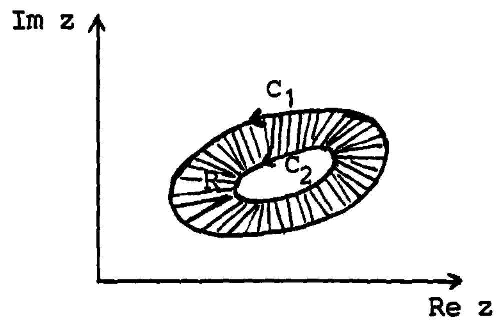
(25%)

(ii) fungsi analisis $f(z)$.

(10%)

...4/-

(b) (i) Katakan R, C_1, C_2 adalah seperti yang dinyatakan di dalam gambarajah berikut:-



Jika suatu fungsi f(z) adalah analisis di dalam R, tunjukkan bahawa

$$(*) \quad \oint_{C_1} f(z)\, dz = \oint_{C_2} f(z)\, dz.$$

(20%)

(ii) Kemudian, dengan berdasarkan (*) buktikan rumus kamiran Cauchy

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_o)}\, dz = 2\pi j\, f(z_o)$$

untuk f(z) analisis di dalam dan pada suatu kontur C yang mengandungi titik $z = z_o$.

(15%)

(c) Buktikan bahawa di dalam bentuk kutub, persamaan-persamaan Cauchy - Riemann bagi suatu fungsi $f(z) = u(r, \theta) + jv(r, \theta)$ boleh dituliskan seperti berikut:-

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

(30%)

3. (a) Kembangkan $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(2-z)}$ di dalam bentuk siri Laurent untuk setiap rantau penumpuan berikut:-

(i) (*) $1 < |z| < 2$

(ii) (**) $|z-1| > 1$

(iii) (***) $0 < |z-2| < 1$

(25%)

(b) Di dalam suatu sistem digit, isyarat input f(n) adalah berdasarkan rumus berikut:-

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z)\, z^{n-1}\, dz$$

iaitu F(z) adalah suatu isyarat output dengan domain z, n = 0, 1, 2, ... dan C adalah suatu kontur yang mengandungi semua titik singular F(z).
Cari isyarat input sistem digit itu jika isyarat outputnya ialah:-

$$F(z) = \frac{3z}{(z-1)^2\,(z+2)}$$

(25%)

(c) Di dalam suatu sistem, fungsi output adalah dinyatakan oleh rumus berikut:-

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, p)\, dt$$

iaitu f(t, p) adalah suatu fungsi input. Dengan menggunakan teorem reja dan kamiran kontur, cari F(p) jika

$$f(t, p) = \frac{e^{pt}}{1 + e^{t}}$$

(50%)

...7/-

4. (a) Cari dua vektor unit yang berserenjang kepada satah

$\vec{A} = 2\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$ dan $\vec{B} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

(20%)

(b) Jika C adalah suatu lengkung ruang ditakrif oleh $\vec{r}(s)$ iaitu s adalah panjangnya suatu lengkok pada C, maka $\frac{d\vec{r}}{ds}$ adalah suatu vektor unit **tangen** kepada C.

Katakan $\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}$. Maka

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k\,\hat{\vec{N}}$$

iaitu $\hat{\vec{N}}$ adalah suatu vektor unit normal kepada C pada suatu titik dan k dipanggil kelengkungan bagi C pada titik itu. Jika lengkung ruang C adalah dinyatakan seperti berikut:

$$x = t\ ,\ y = t^2\ ,\quad z = \frac{2}{3}\ t^2\ ,$$

Cari

(i) $\frac{ds}{dt}$

(Petunjuk: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$)

(10%)

(ii) $\vec{T}$

(10%)

(iii) $\dfrac{d\vec{T}}{ds}$

(15%)

(iv) k

(5%)

(c) Suhu pada suatu titik (x, y, z) dan masa t ialah

$$\phi\ (x, y, z, t) = xy^2 + 2yzt + \sin(xt)$$

Cari kadar perubahan suhu, terhadap masa t, bagi suatu zarah yang melalui titik (2, 3, 1) dengan halaju $\vec{V} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ pada masa t = 0 .

(40%)

5. (a) Cari isipadu bagi suatu paralelepiped yang tepi-tepinya diwakili oleh $\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{C} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

(20%)

...9/-

(b) Suatu zarah bergerak di sepanjang suatu lengkung yang persamaan-persamaan parameter dinyatakan seperti berikut:-

$$x = e^{-t} \quad , \quad y = 2 \cos 3t \quad , \quad z = 2 \sin 3t$$

iaitu t adalah masa.

Cari

(i) halaju dan pecutan pada masa t ;

(ii) magnitud halaju dan pecutan pada t = 0 .

(20%)

(c) Rumus berikut

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{r} \times \vec{R}}{|\vec{R}|^3}$$

menyatakan ketumpatan fluks magnet $\vec{B}$ yang diakibatkan oleh suatu arus elektrik mantap I yang mengalir di dalam suatu litar C. Di sini $\vec{r}$ ialah vektor kedudukan bagi suatu titik P pada C relatif kepada titik asalan dan $\vec{R}$ ialah sesaran dari titik P ke suatu titik pada mana $\vec{B}$ diukur. μ adalah suatu pemalar.
Jika C ialah sutu parabola $x = 2u$, $y = u^2$, $z = 1$, $-\infty < u < \infty$, cari $\vec{B}$ pada titik (0, 0, 3).

(60%)

...10/-

6. (a) Cari $\nabla\phi$ jika

(i) $\phi = \ell n\ |\vec{r}|$,

(ii) $\phi = 1/\ |\vec{r}|$.

(20%)

(b) Ungkapkan, di dalam koordinat silinder, kuantiti-kuantiti berikut jika $\vec{A} = A_1\ \vec{i} + A_2\ \vec{j} + A_3\ \vec{k}$:

(i) $\nabla \cdot \vec{A}$,

(ii) $\nabla \times \vec{A}$

(30%)

(c) (i) Dengan menggunakan teorem kecapahan Gauss, **tunjukkan** bahawa

$$\oint\!\!\oint_S \vec{r} \cdot \hat{\vec{n}}\ ds = 3V \ ,$$

iaitu $\vec{r}$ adalah suatu vektor kedudukan, S suatu permukaan tertutup dan $\hat{\vec{n}}$ vektor unit normal kepada permukaan S serta V adalah isipadu yang terkepung oleh permukaan S.

(20%)

...11/-

(ii) Dengan menggunakan teorem Stoke, tunjukkan bahawa jika $\vec{A}$ adalah bersolenoid (dan adalah selanjar dengan terbitan-terbitan separa peringkat dua yang selanjar),

$$\iint_S (\nabla^2 \vec{A}) \cdot \hat{\vec{n}}\, dS = -\oint_C (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{r}$$

iaitu S adalah suatu permukaan dan $\hat{\vec{n}}$ vektor unit normal kepada permukaan S, C sempadan bagi S dan $\vec{r}$ vektor kedudukan.

(30%)

-oooOooo-