UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1986/87

EUM 102/4 - Matematik II

Tarikh: 13 April 1987 Masa: 9.00 pagi - 12.00 t/hari
(3 Jam)

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 8 mukasurat yang bercetak dan ENAM (6) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab LIMA (5) soalan. Kesemua soalan hendaklah dijawab di dalam Bahasa Malaysia. Setiap soalan dinilai atas 100 markah dan markah yang diperuntukkan bagi setiap ceraian soalan ditunjukkan di dalam kurungan (.).

Buku sifir matematik disediakan. Mesin hitung boleh digunakan di dalam pengiraan. Semua kerja mengira mesti ditunjuk dengan jelas.

Markah mungkin dipotong jika arahan-arahan di muka hadapan buku jawapan tidak dipatuhi.

...2/-

1. (a) Persamaan Clairaut adalah berbentuk

$$y = y'x \pm [(y')^2 + 1]^{\frac{1}{2}} \qquad (*)$$

(i) Tunjukkan bahawa ia boleh ditulis sebagai

$$\frac{dp}{dx}\,[x \pm p(p^2+1)^{-\frac{1}{2}}] = 0$$

di mana $p = y'$. (15%)

(ii) Bagi kes $p' = 0$, dapatkan penyelesaian bagi persamaan (*). (10%)

(iii) Bagi kes $p' \neq 0$, dapatkan suatu fungsi bagi p, iaitu $y = y(p)$ dari persamaan (*). (20%)

(iv) Dengan menggunakan keputusan dari bahagian (iii), tunjukkan bahawa $x^2 + y^2 = 1$ memenuhi persamaan (*). (15%)

(b) Fungsi gamma adalah tertakrif sebagai

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt.$$

Jika diberi $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}$, cari kamilan-kamilan berikut:

(i) $\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} e^{-x^3}\, dx$, (10%)

(ii) $\int_0^1 (-\ln x)^{-\frac{1}{2}}\, dx$, (10%)

(iii) $\int_0^\infty 3^{-4x^2}\, dx$. (20%)

[Petunjuk: $a^b = e^{b \ln a}$]

2. (a) Persamaan Bessel jenis pertama peringkat n adalah

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

(i) Dengan penggantian $y = ux^{-\frac{1}{2}}$, tunjukkan bahawa persamaan di atas menjadi

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(1 + \frac{1-4n^2}{4x^2}\right)u = 0.$$ (20%)

(ii) Apabila $x \to \infty$, tunjukkan bahawa

$$y(x) \to x^{-\frac{1}{2}}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

di mana c_1 dan c_2 adalah pemalar. (15%)

(iii) Jika

$$I_n(x) = j^{-n} J_n(jx) \quad , \quad j = \sqrt{-1}$$

tunjukkan bahawa $I_n(x)$ adalah suatu penyelesaian bagi

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0.$$ (30%)

(b) Dengan penggantian $u(x,y) = w(x,y)e^{-(bx+ay)}$, tunjukkan bahawa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$$

akan menjadi

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + (c - ab)w = 0.$$ (10%)

...4/-

(c) Dengan mengandaikan bahawa $u(x,t) = f(x)\sin t$, cari satu penyelesaian bagi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x \sin t$$

yang memenuhi syarat-syarat $u(o,t) = u(a,t) = 0$, $a \neq n\pi$. (25%)

3. (a) Sistem Sturm-Liouville adalah di dalam bentuk

$$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy}{dx}] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 \qquad x \in [a, b]$$

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \quad , \quad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0$$

di mana a_1, a_2, b_1, b_2 adalah pemalar, λ adalah parameter dan p, q, r adalah fungsi-fungsi terbezakan.

(i) Adakah

$$y'' + \lambda y = 0 \quad , \quad y(o) = y(1) = 0$$ (5%)

suatu sistem Sturm-Liouville?

(ii) Cari nilai-nilai eigen dan fungsi-fungsi eigen bagi persamaan di atas. (30%)

(iii) Tunjukkan bahawa fungsi-fungsi eigen ini adalah ortogon bagi $x \in [0,1]$. (25%)

(iv) Cari set fungsi-fungsi eigen yang ortonormal. (20%)

Rumus-rumus yang mungkin diperlukan:

$$2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$
$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$
$$1 + 1 = 2.$$

...5/-

(b) Dengan penggantian

$$y = z \exp [-\tfrac{1}{2} \int P(x)dx]$$

tunjukkan bahawa $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ menjadi

$$\frac{d^2z}{dx^2} + R(x)z = 0$$

di mana $R(x) = Q(x) - \tfrac{1}{2}P'(x) - \tfrac{1}{4}[P(x)]^2$. (20%)

4. (a) Pertimbangkan persamaan berikut

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y.$$

(i) Selesaikan persamaan di atas. (15%)

(ii) Cari penyelesaian khusus bagi syarat-syarat

$$u(x, o) = x^2 \quad , \quad u(1, y) = \cos y.$$ (25%)

(b) Tunjukkan bahawa

$$u = f(2x + y^2) + g(2x - y^2)$$

memenuhi

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

di mana f , g adalah fungsi yang terbezakan dua kali. (15%)

(c) Di dalam kajian mengenai tarikan graviti, persamaan berikut diperolehi

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{k}{r^2} \qquad (*)$$

di mana k adalah pemalar.

(i) Adakah persamaan di atas linear (lelurus)? (5%)

(ii) Katalah $\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$. Dengan penggantian $z = 1/r$, tunjukkan bahawa persamaan di atas boleh diturunkan kepada

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + z = \frac{k}{h^2} \qquad (**)$$ (30%)

(iii) Selesaikan persamaan (**). Apakah penyelesaian bagi persamaan (*)? (10%)

5. (a) Suatu fungsi, $u(r,t)$, memenuhi

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (*)$$

di mana c adalah pemalar.

(i) Dengan penggantian $v(r, t) = r\,u(r, t)$, dapatkan suatu persamaan baru di dalam sebutan terbitan-terbitan $v(r,t)$ dari persamaan (*). (10%)

(ii) Dengan penggantian

$$x = r + ct \quad , \quad y = r - ct ,$$

turunkan persamaan yang diperolehi di dalam (i) kepada

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 .$$ (30%)

(iii) Tunjukkan bahawa penyelesaian am, u(r, t), adalah berbentuk

$$u(r, t) = \frac{1}{r} [f(r + ct) + g(r - ct)]$$

di mana f, g terbezakan dua kali. (15%)

(b) Persamaan Laguerre adalah

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0 .$$

Penyelesaian baginya adalah polinomial Laguerre, $L_n(x)$. Tunjukkan bahawa $L_n(x)$ adalah ortogon di dalam $x \in [0, \infty)$ terhadap fungsi pemberat e^{-x}. (45%)

6. (a) Taburan haba, u(x, t), di sebatang rod yang ditebat dan suhu di hujung-hujungnya adalah 0°C, diperihalkan oleh

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < 3, \quad t > 0.$$

(i) Apakah syarat-syarat sempadan bagi kes ini? (10%)

...8/-

(ii) Jika diberi

$$u(x, o) = 5 \sin 4\pi x - 3 \sin 8\pi x + 2 \sin 10\pi x$$

tunjukkan bahawa penyelesaiannya adalah

$$u(x, t) = 5e^{-32\pi^2 t} \sin 4\pi x - 3e^{-128\pi^2 t} \sin 8\pi x$$

$$+ 2e^{-200\pi^2 t} \sin 10\pi x .$$ (60%)

(b) Persamaan Ricatti adalah berbentuk

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x) .$$

Dengan penggantian $y = u'/qu$, tunjukkan bahawa ia dapat diturunkan kepada

$$u'' + [p - q'/q]u' - rqu = 0 .$$ (30%)

-oooOooo-