UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Akhir
Sidang Akademik 2008/2009

April 2009

JIM 421 – Aljabar Moden

Masa: 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan bernilai 100 markah.

1. (a) Katakan A dan B ialah subset-subset daripada suatu set X. Buktikan bahawa $A \cap (X - B) = A - B$.

(30 markah)

(b) Satu hubungan H ditakrifkan atas Z dengan $xHy \Leftrightarrow 3x + 2y$ ialah gandaan 5. Tentukan sama ada H refleksif, simetri atau transitif. Adakah H suatu hubungan kesetaraan?

(40 markah)

(c) Fungsi-fungsi f dan g ditakrifkan oleh

$$(x)f = 2x + 1, \quad x \in R$$
$$(x)g = x^2, \quad x \in R.$$

Cari (i) nilai bagi $(1)fg$ dan $(1)gf$

(ii) nilai x jika $(x)f \circ g = 9$.

(30 markah)

2. (a) Berdasarkan sifir Cayley berikut:

*	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	a	e	c
c	c	a	b	b	a
d	b	e	b	e	d
e	d	b	a	d	c

(i) Kirakan $b * d$, $c * c$ dan $[(a * c) * e] * a$.

(ii) Tentukan sama ada * kalis tukar tertib.

(iii) Tentukan sama ada * kalis sekutuan.

(30 markah)

(b) Diberi bahawa $a^3b^3 = (ab)^3$ untuk setiap pasangan unsur a, b dalam suatu kumpulan G, buktikan bahawa $a^2b^2 = (ba)^2$. Seterusnya, buktikan bahawa $a^4b^4 = (ab)^4$ dan $(ab)^3 = (ba)^3$.

(40 markah)

(c) Buktikan bahawa

(i) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$.

(ii) $(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{r-1} \quad a_r)^{-1} = (a_r \quad a_{r-1} \quad \dots \quad a_2 \quad a_1)$

(30 markah)

3. (a) Katakan suatu set terhingga $G = \{e, a, b, c, \dots\}$ di bawah operasi dedua * merupakan suatu kumpulan dengan identiti e.

(i) Jika $H = \{e, a, b\}$ dan $a * a = b$, $b * b = a$, buktikan bahawa H ialah suatu subkumpulan bagi G.

(ii) Jika $K = \{e, a, b, c\}$ dan $a * a = b$, $b * b = c$, $c * c = a$, buktikan bahawa K bukan suatu subkumpulan bagi G.

(40 markah)

(b) Jika $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ dan $\beta = (1\ 3)(2\ 6\ 5\ 7)$, cari

(i) $\mathbf{O}(\alpha)$ dan $\mathbf{O}(\beta^2)$.
(ii) $\beta^{-1}\alpha^3\beta^2$.
(iii) $\alpha^{18}\beta^{27}$.

Tentukan α dan β adalah pilihatur genap atau pilihatur ganjil.

(30 markah)

(c) Buktikan bahawa $\alpha = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_r)$, $r \geq 2$ mempunyai peringkat r.

(30 markah)

4. (a) Senaraikan semua unsur dalam S_4. Dengan ini, cari semua koset kanan bagi $H = \{e, (2\ \ 3), (3\ \ 4)\}$ dalam S_4.

(30 markah)

(b) Jika H adalah subkumpulan bagi kumpulan terhingga $\langle G, * \rangle$, buktikan bahawa $|H| = |Ha|$ $\forall a \in G$.

(30 markah)

...4/-

(c) Katakan $G=\{(a,\ b)\in R\times R \mid a\neq 0\}$ dengan R ialah set semua nombor nyata dan $*$ ditakrifkan atas G dengan $(a,b)*(c,d)=(ac,bc+d)$.

(i) Buktikan bahawa $\langle G,\ *\rangle$ adalah suatu kumpulan.

(ii) Tentukan sama ada $H=\{(1,\ b)\mid b\in R\}$ merupakan suatu subkumpulan normal bagi G.

(40 markah)

5. (a) Katakan $G=\{a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5=e\}$ adalah suatu kumpulan kitaran. Jika $\phi : G\to G$ ditakrifkan oleh $x\phi=x^2,\ x\in G,$ buktikan bahawa ϕ adalah suatu automorfisma atas G.

(40 markah)

(b) Katakan ϕ ialah isomorfisma daripada kumpulan $\langle G,\ \circ\rangle$ ke kumpulan $\langle K,\ *\rangle$. Buktikan bahawa $\phi^{-1} : K\to G$ adalah isomorfisma juga.

(30 markah)

(c) Buktikan bahawa $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \middle|\ a,b,c,d\in Z\right\}$ dengan penambahan dan pendaraban matriks adalah suatu gelanggang yang tidak kalis tukar tertib.

(30 markah)

- oooOooo -