UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1996/97

Oktober/November 1996

MST 563 - Statistik Tertib

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan in mengandungi LIMA soalan di dalam TIGA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Satu sampel rawak saiz $(2m+1)$ diambil daripada populasi yang fungsi ketumpatan kebarangkaliannya diberi oleh

$$f(x) = \frac{1}{A}, \quad 0 \le x \le A.$$

Jika $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(2m+1)}$ menandakan statistik tertib dalam sampel itu dan pembolehubah rawak Z ditakrifkan oleh

$$Z = \frac{X_{(2m+1)}}{X_{(m+1)}}$$

Tunjukkan $\mathrm{Var}(Z) = {}^{2}\!/_{(m-1)}$.

(65/100)

(b) Dalam jangkamasa 20 tahun hujan tahunan tercerap yang paling rendah di suatu daerah ialah 8.6 inci. Tentukan kebarangkalian dalam masa 10 tahun akan datang sekurang-kurangnya 2 tahun dalam 10 tahun itu mengalami hujan tahunan kurang daripada 8.6 inci.

(35/100)

2. Andaikan satu sampel saiz n diambil daripada suatu taburan yang fungsi ketumpatan kebarangkaliannya diberi oleh:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

...2/-

Satu ujian hayat dijalankan terhadap sampel itu dan ujian ditamatkan setelah r 'kegagalan' berlaku $(r < n)$. Katakan $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(r)}$ menandakan masa hayat tertib hinggal gagal. Jika masa hayat hingga gagal adalah pembolehubah rawak tak bersandar tertabur secara secaman, tunjukkan bahawa fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum $X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(r)}$ ialah

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_r) = \frac{r!}{(n-r)!}\frac{1}{\theta^r}\exp\left[-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{r} x_i - \frac{(n-r)}{\theta}x_r\right]$$

$$0 < x_1 < \cdots < x_r < \infty.$$

Jika $V_i = (n-i+1)\left\{X_{(i)} - X_{(i-1)}\right\}$ untuk $i = 1, 2, \cdots, r\left(X_{(0)} = 0\right)$, tunjukkan $\{V_i\}$ adalah pembolehubah rawak tak bersandar tertabur secara eksponen dengan parameter θ.

(100/100)

3. Andaikan $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$ menandakan statistik tertib dalam suatu sampel rawak saiz n yang diambil daripada satu populasi dengan fungsi ketumpatan kebarangkaliannya diberi oleh

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad x > 0$$

Jika julat sampel ialah

$$W = X_{(n)} - X_{(1)}$$

tunjukkan

$$E(W) = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\,{}^{n-1}C_j.$$

(100/100)

4. (a) k sampel tak bersandar setiap satu saiznya n telah diambil daripada suatu populasi selanjar dengan fungsi taburan kumulatif $F(x)$ dan fungsi ketumpatan kebarangkalian $f(x)$. Jika $X_{(n),1}, X_{(n),2}, \cdots, X_{(n),k}$ menandakan nilai-nilai maksimum dalam k sampel itu, tunjukkan fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantumnya diberi oleh

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_k) = n^k \prod_{t=1}^{k}\left[\left\{F(x_t)\right\}^{n-1} f(x_t)\right].$$

(30/100)

...3/-

(b) Biarkan

$$V_k = \prod_{t=1}^{k} X_{(n),t} \text{ menandakan hasildarab}$$

maksimum sampel dan pertimbangkan kes seragam dengan $f(x) = 1, \quad 0 < x < 1$ dan sifar di tempat lain. Tunjukkan untuk kes $k = 2$, fungsi ketumpatan bagi V_2 ialah

$$g_2(v) = n^2 v^{n-1} (-\log v), \quad 0 < v < 1$$

dan menggunakan aruhan terhadap k, tunjukkan fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi V_k ialah

$$g_k(v) = n^k v^{n-1} (-\log v)^{k-1}/\Gamma(k), \quad 0 < v < 1.$$

(70/100)

5. Andaikan $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$ menandakan statistik tertib dalam suatu sampel rawak dari taburan eksponen dengan

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \ge 0 \\ 0, & \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

(i) Tunjukkan bahawa:

$$Y_1 = X_{(1)}$$

$$Y_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}, \quad i = 2, \cdots, n.$$

saling tak bersandar secara stokastik.

(ii) Tunjukkan bahawa Y_i mempunyai taburan gamma dengan parameter

$$\alpha = 1 \text{ dan } \beta = \frac{1}{n+1-i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

(iii) Tunjukkan

$$E\left(X_{(r)}\right) = \sum_{t=1}^{r} \left(\frac{1}{n-t+1}\right)$$

dan

$$\text{Var}\left(X_{(r)}\right) = \sum_{t=1}^{r} \left(\frac{1}{n-t+1}\right)^2,$$

untuk $r = 1, 2, \cdots, n$.

(100/100)

ooo000ooo