PUSAT PENGAJIAN SAINS MATEMATIK
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1995/96

Oktober/November 1995

MST 562 - Proses Statistik Gunaan

Masa : [3 jam]

Jawab semua **LIMA** soalan.

Sifir New Cambridge Elementary Statistical Table disediakan. Alat penghitung "Non-Programmable" boleh digunakan.

1. (a) Katakan $\Omega = (-\infty, \infty)$ dan Q_n ialah medan sigma (σ–field) yang dijana set C,

$$C = \{[0,1), [1,2), [2,3), \cdots, [n-1, n)\}.$$

Tunjukkan bahawa $Q_{n-1} \subseteq Q_n$ untuk semua n; $n = 1, 2, 3, \cdots$. Apakah bentuk subset-subset dari Ω, yang digandungi Q_n?

[20/100]

(b) Seorang sesat di satu persimpangan 3 jalan. Jika dia mengambil jalan I, selepas 3 jam, dia kembali ke persimpangan yang sama. Jika dia mengambil jalan II, selepas 1 jam, dia kembali ke persimpangan yang sama. Jika dia mengambil jalan III, selepas 2 jam, dia selamat.

Anggapkan bahawa jalan-jalan yang belum digunakannya adalah sama boleh jadi dipilih, dan jalan yang telah digunakannya tidak digunakan lagi. Katakan X menandakan jumlah jam dia sesat sehingga dia selamat.

Cari (i) $E(X)$ (ii) $Var(X)$

[40/100]

(c) Ah Chong dan lawannya ada 5 Ringgit di antara mereka. Mereka melambungkan sekeping duit syiling. Jika kepala numeral, Ah Chong akan menang satu ringgit dari lawannya, dan jika bunga muncul, Ah Chong akan kalah satu ringgit.

(i) tuliskan matriks kebarangkalian bagi rantai Markov ini.
(ii) jika Ah Chong bermula dengan 2 ringgit apakah kebarangkalian Ah Chong akan kalah semuanya.

[40/100]

2. (a) Katakan $\{X_n : n \geq 1\}$ ialah proses Bernoulli dengan kebarangkalian kejayaan p, $0 < p < 1$. Tandakan

$$\begin{cases} T_0 = 0 \\ T_k = \text{ masa untuk kejayaan ke - } k; \end{cases}$$

(i) tunjukkan bahawa $\{T_k : k \geq 0\}$ proses stokastik yang mempunyai tokokan ("increment") yang tak bersandar, dan mempunyai tokokan ("increment") yang pegun ("stationary").

(ii) Cari $E(T_R)$, $Var(T_R)$.

(iii) Cari $P(T_6 = 10, T_8 = 16, T_{14} = 22)$; $E(T_6 | T_1, T_2, T_3)$

[50/100]

(b) Katakan $\{X_n : n \geq 0\}$ ialah rantai Markov 2-keadaan dengan matriks kebarangkalian peralihan P

$$P = (P_{ij}), \quad i,\ j = 0,\ 1\ .$$

Katakan rantai Markov itu telah diperhatikan untuk n masa terus menerus dan bilangan peralihan $i \to j$ dari n peralihan itu adalah

	0	1	
0	n_{00}	n_{01}	n_0
1	n_{10}	n_{11}	n_1

(i) Tunjukkan bahawa penganggar kebolehjadian maksimum (*MLE*) bagi P_{ij} ialah

$$\hat{P}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}\ ,\ i,\ j = 0,\ 1.$$

(ii) Jika data dari pemerhatian rantai Markov 2-keadaan ialah:

1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0
0 0 1 0 1 0 1 0 0 1
0 1 0 1 0 1 1 1 1 0
1 1 1 0 0 1 0 1 0 0

Cari anggaran kebarangkalian peralihannya.

[50/100]

3. (a) (i) Nyatakan 3 aksiom itu untuk satu proses Markov 2-keadaan.

(ii) Tulis $P_{ij}(t) = P(X_t = j | x_0 = i)$, $i, j = 0, 1$
Tunjukkan dari aksiom, melalui persamaan pembezaan,

$$P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} ;$$

$$P_{01}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} ;$$

$$P_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} ;$$

$$P_{11}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} ;$$

[60/100]

(b) Seorang operator telefon di sebuah Supermarket dapat memproses satu panggilan sahaja pada mana-mana satu masa. Dua keadaan dia berada ialah "tak sibuk", dan "sibuk". Anggapkan proses Markov 2-keadaan adalah model bagi tabiat bekerjanya.

Operator itu diperhatikan untuk selama satu jam, dan didapati:

(i) pada awal dia didapati sibuk, dan pada akhir satu jam, dia didapati sibuk;
(ii) panjang masa dia tak sibuk = 28 minit;
(iii) bilangan kali dia sibuk = 60 ;

Dari pengalaman lama, secara purata, operator itu berada di dalam keadaan tak sibuk selama 35 saat di antara panggilan, dan setiap panggilan mengambil masa 80 saat. Adakah data di atas bersesuaian dengan pengalaman lama? $\alpha = 0.05$

[40/100]

4. (a) Untuk rantai Markov masa-homogen,

(i) tunjukkan bahawa (Persamaan Chapman-Kolmogorov)

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_k P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)}$$

di mana

$$P_{ij}^{(r)} = P(X_r = j | x_0 = i)$$

...4/-

(ii) jika $P^{(n)}$ tandakan matriks peralihan kebarnagkalian n langkah, tunjukkan bahawa

$$P^{(n)} = P^n = \left[\left(P_{ij}\right)\right]^n .$$

di mana $P = \left(P_{ij}\right)$ ialah matriks peralihan kebarangkalian satu langkah.

[40/100]

(b) Untuk rantai Markov dengan matriks peralihan kebarangkalian P,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \; ; \; 5\times5$$

(i) tentukan kelas-kelas berkomunikasinya.
(ii) keadaan yang mana jadi semula?
keadaan yang mana fana?
(iii) dapatkan kala untuk setiap keadaan jika ujud.
(iv) tuliskan matriks P di dalam bentuk blok.

[40/100]

(c) Berikut ialah matriks peralihan kebarangkalian bagi suatu rantai Markov. Tentukan sama ada taburan penghad bagi keadaannya ujud, jika ujud, dapatkan nilainya

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} ;$$

[20/100]

5. (a) X bertaburan Poisson dengan parameter λ, dimana λ ialah diri sendiri pembolehubah rawak dengan f.k.k. f,

$$f(y) = e^{-y} \; ; \; y > 0 \; .$$

Cari ungkapan bagi $P(X = n)$; $n = 0, 1, 2, \cdots$

[20/100]

...5/-

(b) Katakan satu individu boleh melahirkan j anak pada hujung masa hayatnya dengan kebarangkalian P_j , $j = 0, 1, 2, \cdots$, dan tak bersandar dengan bilangan anak yang dilahirkan individuyang lain. Katakan bilangan individu pada awal ialah $X_0 = 1$, dan X_n menandakan bilangan individu generasi ke-n.

(i) Tunjukkan bahawa $E(X_n) = \left(\sum_j jP_j\right)^n$.

(ii) Tunjukkan bahawa

$$\pi_0 = \lim_{n \to \infty} P(X_n = 0) = 1$$

jika $\sum_{j=0}^{\infty} jP_j < 1$.

(iii) Jika $P_0 = \frac{3}{8}$, $P_1 = \frac{1}{8}$, $P_2 = \frac{1}{2}$ dan $P_j = 0$ untuk $j \geq 3$, tentukan nilai π_0.

[40/100]

(c) Proses stokastik $\{N(t);\ t \geq 0\}$ ialah Poisson dengan kadar λ. Katakan setiap kali peristiwa berlaku, pristiwa itu dapat dikelaskan jenis I dengan kebarangkalian $p = \frac{1}{2}$ dan dapat dikelaskan jenis II dengan kebarangkalian $1 - p = \frac{1}{2}$, dan peristiwa-peristiwa adalah saling tak bersandar.

Jika $N_1(t)$, $N_2(t)$ masing-masing menandakan bilangan peristiwa jenis I dan peristiwa jenis II, tunjukkan bahawa $\{N_1(t)\ ;\ t \geq 0\}$, $\{N_2(t)\ ;\ t \geq 0\}$ ialah proses Poisson yang tak bersandar. Apakah kadar bagi setiap proses Poisson ini?

[40/100]

- oooOooo -

1. Jika X tertabur Poisson dengan parameter $\alpha > 0$, maka

$$P(X = k) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k!} \quad , \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

<u>Perhatian:</u>

Jika X(t) adalah suatu proses Poisson dengan parameter λ, maka

$$P[X(t) = k] = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \quad , \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

2. Jika X tertabur Geometri dengan parameter p, $0 < p < 1$, maka

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} \quad , \; k = 1, 2, 3, \cdots$$

3. Rumus Stirling ialah:

$$m! \sim m^{m+\frac{1}{2}} \, e^{-m} \sqrt{2\pi}$$

4. Jika X tertabur Binomial dengan parameter-parameter, n dan p, $0 < p < 1$, maka

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \; , \; k = 0, 1, 2, \cdots, n \, .$$

5. Jika X tertabur eksponen dengan parameter λ, $\lambda > 0$, maka f.k.k.-nya f

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \; , \; x > 0 \, .$$

- ooo000ooo -