UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1995/96

Oktober/November 1995

MST 561 - Pentaabiran Statistik

Masa : [3 jam]

---

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Katakan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ p.r. tak bersandar, di mana $X_i$ mempunyai f.k.k. berikut:

$$f_i(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha_i)} x^{\alpha_i - 1} e^{-x_i} & , \ 0 < x_i < \infty, \ \alpha_i > 0 \\ 0 & \text{di tempat lain}, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

Biarkan $Y_i = \dfrac{X_i}{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}$ , $i = 1, 2, \cdots, n-1$ , dan $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Dapatkan f.k.k. tercantum bagi $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$. Adakah $Y_n$ tak bersandar daripada $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n-1}$ ?

*[50/100]*

(b) Katakan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ suatu sampel rawak saiz $n$ daripada suatu taburan Poisson dengan parameter $\lambda = 1$, iaitu,

$$P(X_i = x) = \frac{e^{-1}}{x!} \ , \ x = 0, 1, 2, \cdots, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

(i) Terbitkan f.p.m. bagi $X_i$.

(ii) Biarkan $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.
Pertimbangkan $Y_n = \sqrt{n}(\overline{X}_n - 1)$. Tunjukkan f.p.m. bagi $Y_n$ diberi oleh $exp\left[-t\sqrt{n} + n\left(e^{t/\sqrt{n}} - 1\right)\right]$.

(iii) Demikian, dapatkan taburan penghad bagi $Y_n$ apabila $n \to \infty$.

*[30/100]*

...2/-

(c) Katakan $X_1, X_2, \cdots, X_5$ suatu sampel rawak saiz 5 daripada taburan $N(0,\sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$. Cari pemalar $c$ supaya

$$\frac{c(X_1 - X_2)}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}}$$

mempunyai suatu taburan-$t$. Berapakah darjah kebebasan taburan-$t$ ini?

[20/100]

2. (a) Katakan $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4$ statistik tertib daripada suatu sampel rawak saiz $n = 4$ yang diambil daripada suatu taburan dengan f.k.k.

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0\,, & \text{di tempat lain} \end{cases}.$$

(i) Dapatkan f.k.k. tercantum bagi $Y_3$ dan $Y_4$.

(ii) Cari f.k.k. bersyarat bagi $Y_3$, diberi $Y_4 = y_4$.

(iii) Nilaikan $E(Y_3|y_4)$.

[30/100]

(b) Nyatakan dan buktikan ketaksamaan Chebychev.

[30/100]

(c) Berikan takrif bagi konsep-konsep berikut:

(i) menumpu dalam taburan.

(ii) menumpu dalam kebarangkalian.

(iii) menumpu dalam min ke-$r$.

Apakah hubungan di antara tiga konsep di atas?

[40/100]

3. (a) Apakah peranan teorem-teorem berikut di dalam teori penganggaran:

(i) Teorem Pemfaktoran Neyman-Fisher,

(ii) Teorem Rao-Blackwell,

(iii) Teorem Lehmann-Scheffe,

(iv) Teorem Cramer-Rao?

Beri contoh-contoh untuk mengilustrasi jawapan anda.

[40/100]

...3/-

(b) Katakan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ suatu sampel rawak daripada suatu taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0\ ,\ \lambda > 0 \\ 0 & ,\ \text{di tempat lain} \end{cases}$$

(i) Tunjukkan $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ialah suatu statistik yang cukup dan lengkap bagi $\lambda$.

(ii) Katakan $U(X_1) = \begin{cases} 0 \text{ jika } & X_1 < K, \\ 1 \text{ jika } & X_1 \geq K, \end{cases}$

di mana $K$ ialah suatu pemalar yang diketahui. Tunjukkan $U(X_1)$ saksama bagi $e^{-K\lambda}$.

(iii) Demikian, tunjukkan bahawa penganggar saksama bervarians minimum secara seragam bagi $e^{-K\lambda}$ diberi oleh

$$g(T) = \begin{cases} \left(\dfrac{T - K}{T}\right)^{n-1} & \text{apabila } T \geq K \\ 0 & \text{apabila } T < K \end{cases}.$$

*[60/100]*

4. (a) Katakan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ suatu sampel rawak daripada suatu taburan dengan f.k.k.

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1\ ,\ \theta > 0 \\ 0 & ,\ \text{di tempat lain} \end{cases}.$$

Andaikan bahawa taburan priori bagi $\Theta$ diberi oleh f.k.k.

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^r \theta^{r-1}}{\Gamma(r)} e^{-\theta\lambda} & , \theta > 0 \quad , \\ 0 & \text{di tempat lain} \quad , \end{cases}$$

di mana $r$ dan $\lambda$ adalah pemalar positif yang diketahui.

(i) Cari f.k.k. posterior bagi $\Theta$.

(ii) Cari penganggar Bayes bagi $\theta$ terhadap prior $\pi(\theta)$ di atas dengan menggunakan fungsi kerugian ralat kuasa dua.

*[40/100]*

...4/-

(b) Katakan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ suatu sampel rawak saiz $n$ daripada suatu taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta(1+x)^{-(1+\theta)} & , \ 0 < x < \infty, \ \theta > 0 \\ 0 & \text{di tempat lain} \end{cases}.$$

(i) Cari p.k.m. bagi (a) $\theta$ dan (b) $1/\theta$.

(ii) Adakah wujudnya suatu statistik yang cukup dan lengkap bagi $\theta$?

(iiii) Cari suatu penganggar saksama bervarians minimum secara seragam bagi (a) $1/\theta$ dan (b) $\theta$.

(iv) Cari batas bawah Cramer-Rao bagi varians penganggar-penganggar saksama untuk $1/\theta$.

*[60/100]*

5. (a) Nyatakan lema asasi Neyman-Pearson.

*[10/100]*

(b) Huraikan konsep-konsep yang berkaitan di dalam teori pengujian hipotesis.

*[20/100]*

(c) Katakan $X_1$, $X_2$ suatu sampel rawak saiz 2 daripada suatu taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\theta) = \begin{cases} (1+\theta)x^{\theta} & , \ 0 \le x \le 1 \ , \ \theta > 0 \ , \\ 0 & , \ \text{di tempat lain} \end{cases}.$$

Tunjukkan bahawa ujian yang paling berkuasa secara seragam untuk menguji $H_0 : \theta = 2$ lawan $H_1 : \theta = \theta_1 < 2$ diberi oleh

$$\phi(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{jika} \quad x_1 x_2 \le \frac{3}{4} \\ 0 & \text{jika} \quad x_1 x_2 > \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Apakah saiz ujian di atas?

*[30/100]*

...5/-

(d) Suatu sampel rawak $X_1, X_2, \cdots, X_n$ menimbul daripada suatu taburan diberi oleh

$$H_0 : f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} , & 0 < x < \theta \ , \ \theta > 0 \\ 0 , & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

atau

$$H_1 : f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-x/\theta} , & 0 < x < \infty \ , \ \theta > 0 \\ 0 , & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Tentukan ujian nisbah kebolehjadian yang berkaitan dengan ujian $H_0$ lawan $H_1$.

*[40/100]*

- ooo0ooo -

**Table B.1 Special Discrete Distributions**

| Name of Distribution | Notation and Parameters | Discrete pdf $f(x)$ | Mean | Variance | MGF $M_X(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Binomial | $X \sim BIN(n, p)$<br>$0 < p < 1$<br>$q = 1 - p$ | $\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$<br>$x = 0, 1, \ldots, n$ | $np$ | $npq$ | $(pe^t + q)^n$ |
| Bernoulli | $X \sim BIN(1, p)$<br>$0 < p < 1$<br>$q = 1 - p$ | $p^x q^{1-x}$<br>$x = 0, 1$ | $p$ | $pq$ | $pe^t + q$ |
| Negative Binomial | $X \sim NB(r, p)$<br>$0 < p < 1$<br>$r = 1, 2, \ldots$ | $\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$<br>$x = r, r+1, \ldots$ | $r/p$ | $rq/p^2$ | $\left(\frac{pe^t}{1 - qe^t}\right)^r$ |
| Geometric | $X \sim GEO(p)$<br>$0 < p < 1$<br>$q = 1 - p$ | $pq^{x-1}$<br>$x = 1, 2, \ldots$ | $1/p$ | $q/p^2$ | $\frac{pe^t}{1 - qe^t}$ |
| Hypergeometric | $X \sim HYP(n, M, N)$<br>$n = 1, 2, \ldots, N$<br>$M = 0, 1, \ldots, N$ | $\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x} \Big/ \binom{N}{n}$<br>$x = 0, 1, \ldots, n$ | $nM/N$ | $n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$ | * |
| Poisson | $X \sim POI(\mu)$<br>$0 < \mu$ | $\frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$<br>$x = 0, 1, \ldots$ | $\mu$ | $\mu$ | $e^{\mu(e^t - 1)}$ |
| Discrete Uniform | $X \sim DU(N)$<br>$N = 1, 2, \ldots$ | $1/N$<br>$x = 1, 2, \ldots, N$ | $\frac{N+1}{2}$ | $\frac{N^2 - 1}{12}$ | $\frac{1 - e^{(N+1)t}}{1 - e^t}$ |

*Not tractable.

## Table B.2 Special Continuous Distributions

| Name of Distribution | Notation and Parameters | Continuous pdf $f(x)$ | Mean | Variance | MGF $M_X($ |
|---|---|---|---|---|---|
| Uniform | $X \sim \text{UNIF}(a, b)$<br>$a < b$ | $\frac{1}{b-a}$<br>$a < x < b$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | $\frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$ |
| Normal | $X \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$<br>$0 < \sigma^2$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-[(x-\mu)/\sigma]^2/2}$ | $\mu$ | $\sigma^2$ | $e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$ |
| Gamma | $X \sim \text{GAM}(\theta, \kappa)$<br>$0 < \theta$<br>$0 < \kappa$ | $\frac{1}{\theta^\kappa \Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-x/\theta}$<br>$0 < x$ | $\kappa\theta$ | $\kappa\theta^2$ | $\left(\frac{1}{1-\theta t}\right)^\kappa$ |
| Exponential | $X \sim \text{EXP}(\theta)$<br>$0 < \theta$ | $\frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$<br>$0 < x$ | $\theta$ | $\theta^2$ | $\frac{1}{1-\theta t}$ |
| Two-Parameter Exponential | $X \sim \text{EXP}(\theta, \eta)$<br>$0 < \theta$ | $\frac{1}{\theta} e^{-(x-\eta)/\theta}$<br>$\eta < x$ | $\eta + \theta$ | $\theta^2$ | $\frac{e^{\eta t}}{1-\theta t}$ |
| Double Exponential | $X \sim \text{DE}(\theta, \eta)$<br>$0 < \theta$ | $\frac{1}{2\theta} e^{-\lvert x-\eta \rvert/\theta}$ | $\eta$ | $2\theta^2$ | $\frac{e^{\eta t}}{1-\theta^2 t^2}$ |

## Table B.2 Special Continuous Distributions, continued

| Name of Distribution | Notation and Parameters | Continuous pdf $f(x)$ | Mean | Variance | MGF $M_X(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Weibull | $X \sim \mathrm{WEI}(\theta, \beta)$<br>$0 < \theta$<br>$0 < \beta$ | $\frac{\beta}{\theta^{\beta}} x^{\beta-1} e^{-(x/\theta)^{\beta}}$<br>$0 < x$ | $\theta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$ | $\theta^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]$ | * |
| Extreme Value | $X \sim \mathrm{EV}(\theta, \eta)$<br>$0 < \theta$ | $\frac{1}{\theta}\exp\{[(x-\eta)/\theta] - \exp[(x-\eta)/\theta]\}$ | $\eta - \gamma\theta$<br>$\gamma \doteq 0.5772$<br>(Euler's const.) | $\frac{\pi^2\theta^2}{6}$ | $e^{\eta t}\Gamma(1 + \theta t)$ |
| Cauchy | $X \sim \mathrm{CAU}(\theta, \eta)$<br>$0 < \theta$ | $\frac{1}{\theta\pi\{1 + [(x-\eta)/\theta]^2\}}$ | ** | ** | ** |
| Pareto | $X \sim \mathrm{PAR}(\theta, \kappa)$<br>$0 < \theta$<br>$0 < \kappa$ | $\frac{\kappa}{\theta(1 + x/\theta)^{\kappa+1}}$<br>$0 < x$ | $\frac{\theta}{\kappa - 1}$<br>$1 < \kappa$ | $\frac{\theta^2\kappa}{(\kappa-2)(\kappa-1)^2}$<br>$2 < \kappa$ | ** |
| Chi-Square | $X \sim \chi^2(\nu)$<br>$\nu = 1, 2, \ldots$ | $\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-x/2}$<br>$0 < x$ | $\nu$ | $2\nu$ | $\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\nu/2}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Student's $t$ | $X \sim t(\nu)$ | $\dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \dfrac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \left(1 + \dfrac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$ | $0$ | $\dfrac{\nu}{\nu-2}$ | ** |
| | $\nu = 1, 2, \ldots$ | | $1 < \nu$ | $2 < \nu$ | |
| Snedecor's $F$ | $X \sim F(\nu_1, \nu_2)$ | $\dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} x^{\frac{\nu_1}{2}-1}$ | $\dfrac{\nu_2}{\nu_2-2}$ | $\dfrac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}$ | ** |
| | $\nu_1 = 1, 2, \ldots$<br>$\nu_2 = 1, 2, \ldots$ | $\times \left(1 + \dfrac{\nu_1}{\nu_2} x\right)^{-\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}$ | $2 < \nu_2$ | $4 < \nu_2$ | |
| Beta | $X \sim \mathrm{BETA}(a,b)$<br>$0 < a$<br>$0 < b$ | $\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}$<br>$0 < x < 1$ | $\dfrac{a}{a+b}$ | $\dfrac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$ | * |

*Not tractable.
**Does not exist.

**LAMPIRAN-2**

Katakan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel rawak daripada taburan $F(x)$ dengan f.k.k. f(x). Andaikan p.r. $X_i$ adalah selanjar.

Biarkan $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ialah statistik tertib bagi sampel ini, iaitu, $Y_i = X_{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Maka:

(i) f.k.k. tercantum bagi $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ialah $g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = n!\, f(y_1), f(y_2) \ldots f(y_n)$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$.

(ii) f.k.k. bagi $Y_k$ ialah $g_k(y_k) = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left[F(y_k)\right]^{k-1} \left[1 - F(y_k)\right]^{n-k} f(y_k)$.

(iii) f.k.k. tercantum bagi $Y_i$ dan $Y_j$ ; $i < j$, ialah

$$g_{ij}(y_i, y_j) = \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} \left[F(y_i)\right]^{i-1} \left[F(y_j) - F(y_i)\right]^{j-i-1} \left[1 - F(y_j)\right]^{n-j} f(y_i) f(y_j),\ y_i < y_j .$$