UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1997/98

September 1997

MSS 411 - Aljabar Linear Lanjutan

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini TUJUH soalan di dalam EMPAT halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1.(a) Jika $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, cari A^n, $n \in \mathbb{N}$.

(60/100)

(b) Jika $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, cari matriks C yang bersongsang supaya CAC^{-1} berbentuk $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$.

(40/100)

2.(a) Katakan $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ ialah matriks bagi transformasi linear $T = R^3 \to P_2(R)$ berhubung dengan asas

$$\pi = \{ (1, 0, 0), (0, 2, 0), (1, 0, 1) \} \text{ bagi } R^3$$

dan $$B = \{2,\ 1+x,\ x^2\} \text{ bagi } P_2(R)$$

Cari $(a, b, c)\, T$ dan Ker(T).

(40/100)

...2/-

(b) Jika T: $R^4 \rightarrow R^3$ ialah transformasi linear dan

$$\begin{aligned}(1,0,0,0)\,T &= (1,2,3)\\ (0,1,1,0)\,T &= (0,1,4)\\ (0,0,1,1)\,T &= (-1,0,6)\\ (0,0,0,2)\,T &= (5,6,7)\end{aligned}$$

Cari $(x, y, z, t)\,T$.

(30/100)

(c) Katakan V adalah ruang vektor dimensi terhingga dan T: $V \rightarrow V$ ialah transformasi linear. Buktikan T adalah satu-ke-satu jika dan hanya jika T adalah seluruh.

(30/100)

3.(a) Katakan $V = \left\{ \{a + kd\}_{k=0}^{\infty} \;\middle|\; a,\, d \in R \right\}$, dan operasi "+", "·" ditakrifkan seperti berikut:

$$\forall \{a_1 + kd_1\}_{k=0}^{\infty},\ \{a_2 + kd_2\}_{k=0}^{\infty} \in V,\ \alpha \in \mathrm{R},$$

$$\{a_1 + kd_1\}_{k=0}^{\infty} + \{a_2 + kd_2\}_{k=0}^{\infty} = \left\{ (a_1 + a_2) + k(d_1 + d_2) \right\}_{k=0}^{\infty},$$

$$\alpha \cdot \{a_1 + kd_1\}_{k=0}^{\infty} = \{\alpha a_1 + k(\alpha d_1)\}_{k=0}^{\infty}$$

Buktikan V ialah ruang vektor atas R

(40/100)

(b) Cari suatu asas bagi V dan tentukan $\dim_R V$.

(40/100)

(c) Jika $W = \left\{ \{a + kd\}_{k=0}^{\infty} \;\middle|\; a,\, d \in Q \right\}$, Adakah W suatu subruang V atas R? Adakah W suatu subruang V atas Q?

(20/100)

4.(a) Katakan $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$. Cari polinomial minimal bagi A.

(40/100)

(b) Katakan $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ ialah polinomial minimal bagi matriks A. Buktikan A bersongsang jika dan hanya jika $a_0 \neq 0$.

(30/100)

...3/-

(c) Katakan $T: V \to V$ ialah transformasi linear dan $\dim_F V = n$. Jika wujud $k \in N$ sedemikian hingga $T^k = \hat{0}$, buktikan $T^n = \hat{0}$.

(30/100)

5. Katakan $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$, $a_{ij} \in R$

Takrifkan $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. $\forall A = (a_{ij})_{nxn}$, $B = (b_{ij})_{nxn}$, $\alpha \in R$,

(a) Buktikan $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

(25/100)

(b) Buktikan $Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$

(25/100)

(c) Buktikan $Tr(AB) = Tr(BA)$

(25/100)

(d) Jika $A^3 - A = \tilde{0}$, buktikan $-n \le Tr(A) \le n$.

(25/100)

6.(a) Cari polinomial berdarjah dua yang sesuai sekali kepada data di bawah dengan kaedah "least square"

x	0	1	2	3
y	1	2	4	4

(40/100)

(b) Jika $f: R^2 \times R^2 \to R$ ditakrifkan seperti berikut:

$$f(\,(a,\, b),\, (c,\, d)\,) = (b-a)\ (d-c) + ac$$

Buktikan f ialah hasil darah noktah.

(30/100)

(c) Cari suatu asas orthonormal bagi R^2.

(30/100)

...4/-

7.(a) Katakan $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$, $a_{ij} \in R$

Jika $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = k$, $j = 1, 2, \cdots, n$. Buktikan k ialah nilai eigen A.

(60/100)

(b) Katakan $T: V \to V$ ialah transformasi linear. Jika $\dim_F V = n$ dan T singular, buktikan wujud transformasi linear $\xi: V \to V$ sedemikian hingga $\xi \circ T = \tilde{0}$, tetapi $T \circ \xi \neq \tilde{0}$.

(40/100)

-oooOooo-