UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1998/99

Februari 1999

MSS 301/MSS 401 – Analisis Kompleks

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LAPAN soalan di dalam DUA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. Katakan $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$. Andaikan f analisis pada $\mathbb{C}$.

   (a) Buktikan f memenuhi persamaan Cauchy-Riemann.

   (b) Tunjukkan u adalah fungsi harmonik.

   (c) Jika $u(x, y) = e^{2x} \cos 2y$, tunjukkan u adalah fungsi harmonik, dan seterusnya dapatkan suatu fungsi analisis f dengan $f = u + iv$.

(16/100)

2. (a) Tentukan jejari ketumpuan R untuk siri kuasa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{3^n}$$

   (b) Dengan menggunakan perwakilan siri geometrik, tuliskan suatu siri kuasa untuk $\dfrac{1}{1-\frac{z}{3}}$, dan seterusnya tunjukkan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{3^n} = \frac{1}{3}\frac{z}{(1-\frac{z}{3})^2} \quad \text{untuk semua } z \in \mathbb{C} \quad , \quad |z| < R .$$

(12/100)

3. Cari semua nilai z dengan $\sin z = 3$.

(8/100)

...2/-

4. (a) Nyatakan rumus kamiran Cauchy untuk $f(z_0)$ dan $f'(z_0)$.

(b) Nilaikan kamiran berikut

(i) $\displaystyle\oint_{|z-2|=2} \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz$ (ii) $\displaystyle\oint_{|z+2|=3} \frac{dz}{z^2(z+4)}$

(*12/100*)

5. (a) Nyatakan teorem Liouville.

(b) Andaikan $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ suatu fungsi analisis dan $|f(z)| \geq \frac{1}{2}$ untuk semua $z \in \mathbb{C}$. Buktikan $f(z)$ adalah fungsi malar.

(c) Beri satu contoh fungsi terbeza $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $|g(x)| \geq \frac{1}{2}$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$.

(*14/100*)

6. Katakan $f(z) = \dfrac{1}{z - z^2}$. Cari siri Laurent untuk $f(z)$ pada

(i) $0 < |z| < 1$ (ii) $|z| > 1$

(*12/100*)

7. (a) Nilaikan $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z+i)(z-i)z^2}\, dz$ menggunakan teorem reja.

(b) Dengan teorem reja, tunjukkan bahawa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{e}.$$

(*14/100*)

8. Jawab (A) ATAU (B)

(A) (i) Nyatakan teorem Maksima Prinsipal. (*Maximum Principle*)

(ii) Cari semua nilai maksima untuk $|z^2 + 2z - 1|$ dalam cakera $|z| < 1$.

(*12/100*)

ATAU

(B) (i) Dengan menggunakan teorem Rouché, tunjukkan $z^4 + 3z - 1 = 0$ mempunyai tiga punca unik di dalam anulus $1 < |z| < 2$.

(*12/100*)

- oooOooo -