UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1996/97

Oktober/November 1996

MSG 442 - Kaedah Unsur Terhingga

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan in mengandungi TIGA soalan di dalam TIGA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. Pertimbangkan masalah berikut:

$$(1+x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + x = 0, \qquad 0 < x < 1$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

(a) Dengan menggunakan kaedah kolokasi dengan fungsi cubaan $y = ax - ax^2$ dapatkan penyelesaian hampiran bagi masalah tersebut di atas supaya sisanya $R(x)$ sama dengan sifar untuk $x = \frac{1}{2}$.

(b) Dapatkan penyelesaian kaedah unsur terhingga bagi masalah tersebut dengan menggunakan tiga unsur linear.

(c) Dapatkan penyelesaian tepat bagi masalah tersebut.

(d) Bandingkan kedua-dua penyelesaian hampiran yang diperolehi dengan penyelesaian tepat itu.

(100/100)

2. (a) Selesaikan masalah berikut:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{di dalam } \Omega$$

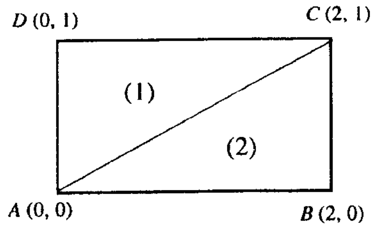
dengan syarat

$$\phi(x, 0) = 30x + 20, \qquad 0 \le x \le 2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{pada sisi } x = 0 \text{ dan sisi } x = 2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\phi + 2 \quad \text{pada sisi } y = 1$$

di mana Ω ialah rantau berikut:



Rajah 1

Gunakan dua unsur segitiga linear seperti ditunjukkan dalam Rajah 1.

(40/100)

(b) Pertimbangkan masalah bersandarkan masa berikut:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2\frac{\partial \phi}{\partial t}, \qquad 0 < x < 3, \qquad t > 0$$

$$\phi(x, 0) = 10, \qquad 0 \le x \le 3$$

$$\phi(0, t) = 10, \qquad \phi(3, t) = 100, \qquad t > 0$$

Dengan menggunakan tiga unsur linear dengan perumusan gumpal, $\theta = \frac{1}{2}$ dan $\Delta t = 1$, dapatkan $\phi(1, t)$ dan $\phi(2, t)$ pada $t = 1$ saat.

(30/100)

(c) Dapatkan masalah variasi yang setara dengan masalah berikut:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - 1\right) y = 0$$

$$y(0) = 1, \qquad \frac{dy}{dx}(1) = -2y + 3$$

Seterusnya dapatkan persamaan Euler-Lagrange bagi masalah variasi itu.

(30/100)

...3/-

3. (a) Pertimbangkan penyelesaian untuk persamaan:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = a \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

melalui kaedah unsur terhingga dengan perumusan konsisten. Untuk segitiga $A\ (0, 0)$, $B\ (b, 0)$, $C\ (0, b)$ dapatkan syarat atas Δt supaya ayunan berangka dapat dielakkan.

(40/100)

(b) Dapatkan nilai hampiran bagi kamiran berikut:

$$\int_1^5 \sqrt{1 + x^2}\, dx$$

dengan menggunakan kuadratur Gauss dengan tiga titik persampelan.

(30/100)

(c) Suatu unsur dengan segiempat mempunyai bucu-bucu (0, 0), (10, 0), (6, 6) dan (0, 8). Dengan menggunakan fungsi bentuk segiempat bilinear, dapatkan transformasi dari koordinat (x, y) kepada koordinat (ξ, η) yang mentransformasikan segiempat tersebut kepada segiempat $\{(\xi, \eta) : -1 \le \xi \le 1 \text{ dan } -1 \le \eta \le 1\}$.

Seterusnya, dapatkan matrix Jacobian untuk transformasi itu.

(30/100)

ooo000ooo

Unsur Linear 1-D

$$\left[k^{(e)}\right] = \frac{D}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \left\{f^{(e)}\right\} = \frac{QL}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Unsur Segitiga Linear

$$N_i = [a_i + b_i x + c_i y]/(2A), \quad N_j = [a_j + b_j x + c_j y]/(2A)$$
$$N_k = [a_k + b_k x + c_k y]/(2A)$$

dengan

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix}$$

dan

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \quad b_i = Y_j - Y_k, \quad c_i = X_k - X_j$$
$$a_j = X_k Y_i - X_i Y_k, \quad b_j = Y_k - Y_i, \quad c_j = X_i - X_k$$
$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i, \quad b_k = Y_i - Y_j, \quad c_k = X_j - X_i$$

$$\left[k_D^{(e)}\right] = \frac{D_x}{4A}\begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_i b_j & b_j^2 & b_j b_k \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k^2 \end{bmatrix} + \frac{D_y}{4A}\begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_i c_j & c_j^2 & c_j c_k \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k^2 \end{bmatrix}$$

$$\left[k_G^{(e)}\right] = \frac{GA}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \left\{f^{(e)}\right\} = \frac{QA}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\left[k_M^{(e)}\right] = \frac{ML_{ij}}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{dll.}$$

$$\int_A L_1^a \, L_2^b \, L_3^c \, dA = \frac{a!\,b!\,c!}{(a+b+c+2)!}\,2A$$

(MJG 442)

Unsur Segiempat Tepat Bilinear

$$N_i = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \qquad N_j = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_k = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \qquad N_m = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$N_i = \left(1-\frac{s}{2b}\right)\left(1-\frac{t}{2a}\right), \qquad N_j = \frac{s}{2b}\left(1-\frac{t}{2a}\right)$$

$$N_k = \frac{st}{4ab}, \qquad N_m = \frac{t}{2a}\left(1-\frac{s}{2b}\right)$$

$$\left[k_D^{(e)}\right] = \frac{D_x a}{6b}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{D_y b}{6a}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[k_G^{(e)}\right] = \frac{GA}{36}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}; \qquad \left\{f^{(e)}\right\} = \frac{QA}{4}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\left[k_M^{(e)}\right] = \frac{ML_{ij}}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{dll.}$$

Unsur Kuadratik 1-D

$$N_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi-1), \qquad N_2 = -(\xi+1)(\xi-1), \qquad N_3 = \frac{1}{2}\xi(\xi+1)$$

Unsur Segitiga Kuadratik 6-Nod

$$N_1 = L_1(2L_1-1), \qquad N_2 = 4L_1L_2,$$

$$N_3 = L_2(2L_2-1), \qquad N_4 = 4L_2(1-L_1-L_2)$$

$$N_5 = 1 - 3(L_1+L_2) + 2(L_1+L_2)^2, \qquad N_6 = 4L_1(1-L_1-L_2)$$

(MSG 442)

Unsur Segiempat Kuadratik 8-Nod

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1), \quad N_4 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1), \quad N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_7 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta+1), \quad N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi)$$

Kuadratur Gauss-Legendre

$n=1$	$\xi_i = 0.0$	$W_i = 2.0$
$n=2$	$\xi_i = \pm 0.577350$	$W_i = 1.0$
$n=3$	$\xi_i = 0.0$	$W_i = 8/9$
	$\xi_i = \pm 0.774597$	$W_i = 5/9$
$n=4$	$\xi_i = \pm 0.861136$	$W_i = 0.347855$
	$\xi_i = \pm 0.339981$	$W_i = 0.652145$

Untuk Domain Segitiga

n	Titik	L_1	L_2	W_i
2	a	1/3	1/3	1/2
3	a	1/2	0	1/6
	b	1/2	1/2	1/6
	c	0	1/2	1/6

Masalah Bersandarkan Masa

$$\left([C] + \theta\Delta t[K]\right)\{\Phi\}_b = \left([C] - (1-\theta)\Delta t[K]\right)\{\Phi\}_a + \Delta t\left((1-\theta)\{F\}_a + \theta\{F\}_b\right)$$

Perumusan Konsisten

$$\left[c^{(e)}\right] = \frac{\lambda L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \left[c^{(e)}\right] = \frac{\lambda A}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[c^{(e)}\right] = \frac{\lambda A}{36}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta t > \frac{\lambda L^2}{6D\theta}, \qquad \Delta t < \frac{\lambda L^2}{12D(1-\theta)}$$

Perumusan Tergumpal

$$\left[c^{(e)}\right] = \frac{\lambda L}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \left[c^{(e)}\right] = \frac{\lambda A}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[c^{(e)}\right] = \frac{\lambda A}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta t < \frac{\lambda L^2}{4D(1-\theta)}$$