

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1997/98

September 1997

MSG 328 - Pemodelan Matematik

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TIGA soalan di dalam EMPAT halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA TIGA soalan.

1.(a) Terbitkan persamaan keabadian

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (1)$$

bagi suatu saluran dengan luas keratan rentas $A \text{ m}^2$, aliran air $Q \text{ m}^3/\text{s}$, di mana $t =$ masa (s), $x =$ jarak (m). Seterusnya terbitkan persamaan gelombang tulen.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

bagi suatu saluran seragam dengan $u =$ halaju air dan $\eta =$ paras air atas paras purata. Terangkan dengan jelas anggapan-anggapan yang sesuai untuk model di atas serta maksud dan unit g dan h .

(b) Tunjukkan bahawa (2) dan (3) boleh diturunkan kepada bentuk persamaan gelombang berikut:

$$\omega_{\eta} = c^2 \omega_{xx} \quad (4)$$

untuk u dan η masing-masing. Apakah nilai c^2 .

Sahkan bahawa

$$\eta = a \sin(\sigma t - kx) \quad (5)$$

$$u = a \sqrt{\frac{g}{h}} \sin(\sigma t - kx) \quad (6)$$

ialah suatu penyelesaian dengan $\sigma^2 = gh k^2$. Apakah maksud dan unit bagi σ dan k ?

...2/-

- (c) Bagi suatu muara seragam, biarkan $h = 15$ m, $g = 9.81$ m/s². Untuk suatu pasang-surut semi-harian (kalan 12.42 jam) dengan amplitud $a = 1.25$ m, dapatkan halaju u dan lakarkan η dan u pada rajah yang sama.
- (d) Jika rintangan linear dan kelikatan diambil kira, maka persamaan (2) akan terjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + Ru - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (7)$$

Bagi pasang-surut di atas dapatkan anggaran setiap sebutan di (7) jika $R = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $A = 10^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Seterusnya dapatkan pasang-surut dengan rintangan linear Ru , dengan mengabaikan kelikatan.

(100/100)

- 2.(a) Apabila keadaan mantap tercapai, persamaan aliran-sebaran ialah

$$E \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - u \frac{\partial c}{\partial x} - kc = 0 \quad (8)$$

di mana k ialah kadar reputan. Andaikan unit asas ialah m , s dan kg . Berikan unit bagi E , c , u dan k .

- (i) Terbitkan penyelesaian

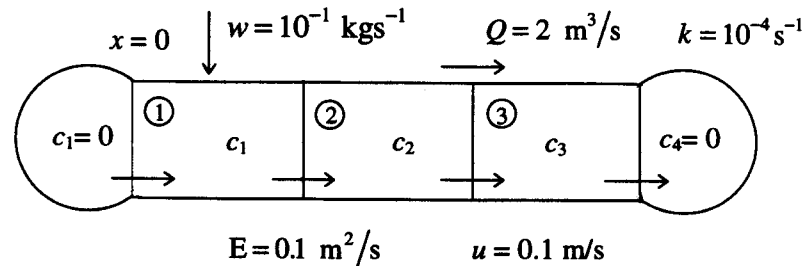
$$c(x) = \begin{cases} c_0 e^{m_1 x} & , \quad x \leq 0 \\ c_0 e^{m_2 x} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

di mana $m_1 = \frac{u}{2E}(1+\alpha)$, $m_2 = \frac{u}{2E}(1-\alpha)$, $\alpha = \sqrt{1 + \frac{4kE}{u^2}}$. Terangkan apakah syarat-syarat sempadan yang sesuai, untuk penyelesaian di atas.

- (ii) Jika aliran ialah Q m³/s dan kadar pembuangan bahan kimia ialah w kgs⁻¹ terbitkan nilai $c_0 = \frac{w}{Q\alpha}$.
- (iii) Andaikan $E = 0.1$ m²/s, $u = 0.1$ m/s, $Q = 2$ m³/s, $k = 10^{-4}$ s⁻¹ dan $w = 10^{-1}$ kgs⁻¹. Cari c_0 dan $c(x)$ pada $x = 4$ km dan $x = -0.1$ km. Lakarkan $c(x)$. Dapatkan anggaran nilai untuk setiap sebutan dalam persamaan (8) di atas, untuk $x \geq 0$ dan $x \leq 0$ masing-masing.

...3/-

- (b) Berasaskan pertimbangan di atas, kita selesaikan (8) bahagian (iii) mengikut kaedah berangka dengan 3 segmen seperti berikut, untuk $x \geq 0$.



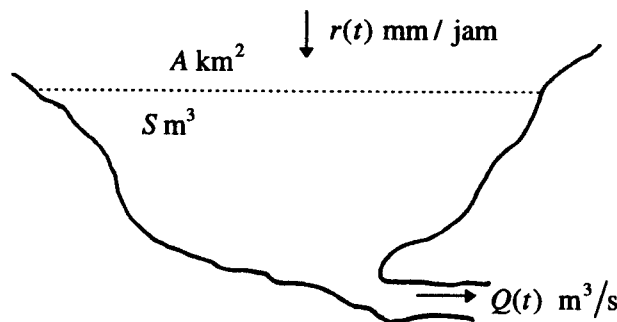
Anggaplah panjang setiap setiap segmen $\Delta x = 1000$ m, dan $c_0 = 0$, $c_4 = 0$.

Bentukkan sistem (3x3) untuk masalah ini dan selesaikan. Bandingkan dengan jawapan di bahagian (iii) di atas.

Adakah anggapan $\Delta x = 1000$ m, dan $c_0 = c_4 = 0$ sesuai?

(100/100)

- 3.(a) Andaikan suatu tadahan seperti berikut



yang boleh dimodelkan melalui model takungan linear, di mana dianggapan bahawa aliran $Q(t)$ m^3/s adalah berkadaran dengan takungan $S(t)$ m^3 , iaitu

$$Q \propto S \text{ ataupun } Q = kS \quad (9)$$

sebagai gantian untuk persamaan hidrodinamik. Persamaan keabadian ialah

$$\frac{dS}{dt} = R(t) - Q(t) \quad (10)$$

di mana $R(t)$ ialah aliran masuk ke dalam tadahan melalui hujan $r(t)$ mm/jam atas permukaan dengan luas A km^2 .

..4/-

Anggapkan bahawa $r(t)$ mm/jam dan A km² telah diberikan.

- (i) Dapatkan $R(t)$ m³/s.
- (ii) Bentukkan persamaan pembezaan untuk $Q(t)$ m³/s dan selesaikan jika $Q_0 = 4$ m³/s, $r(t) = 25$ mm/jam untuk 4 jam dan $A = 100$ km².
- (iii) Jika $r(t) = 1500$ mm/tahun bersih, $A = 100$ km² dapatkan $R(t)$ m³/s dan selesaikan (ii) jika $Q_0 = 5$ m³/s. Lakarkan $Q(t)$ dengan menunjukkan Q apabila $t \rightarrow \infty$.

(b) Anggapkan pekali sebaran $E = 0$ m²s⁻¹ bagi soalan ini.

- (i) Pertimbangkan model BOD-DO selepas keadaan mantap tercapai

$$0 = -v \frac{dL}{dx} - K_r L$$

$$0 = -v \frac{dC}{dx} - K_r L + K_a (C_s - C)$$

dengan syarat $L = L_0$, $C = C_0$ pada $X = 0$, di mana L = kepekatan BOD, C = kepekatan DO, v = halaju, K_r = kadar reputan, K_a = kadar peranginan dan C_s = pemalar ketepuan. Tunjukkan $L = L_0 \exp\left(-K_r \frac{x}{v}\right)$. Biarkan $D = C_s - C$, $D_0 = C_s - C_0$ (defisit bagi DO). Tunjukkan bahawa defisit DO iaitu D , adalah diberikan oleh

$$D = L_0 \left(\frac{K_r}{K_a - K_r} \left[\exp\left(-K_r \frac{x}{v}\right) - \exp\left(-K_a \frac{x}{v}\right) \right] \right) + D_0 \exp\left(-K_a \frac{x}{v}\right).$$

- (ii) Misalkan suatu sungai yang menerima efluen BOD dengan ciri-ciri seperti berikut. Ciri-ciri efluen ialah $Q_e = 0.5$ m³/s, $L_e = 150$ mg/l, $D_e = 0$ mg/l, dan ciri-ciri sungai ialah $E = 0$ m²/s, $v = 0.3$ m/s, $K_a = 0.5$ d⁻¹, $K_r = 0.4$ d⁻¹, $Q = 4.5$ m³/s, $L = 0$ mg/l, $D = 0$ mg/l.

Anggapkan keadaan mantap tercapai. Cari nilai L dan D pada , 10 km, 40 km dan 80 km. Dapatkan nilai genting bagi defisit D dan lakarkan graf bagi L dan D .

(100/100)

-ooo0ooo-