

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua  
Sidang Akademik 1996/97

April 1997

MSG 328/MKT 443 - Pemodelan Matematik

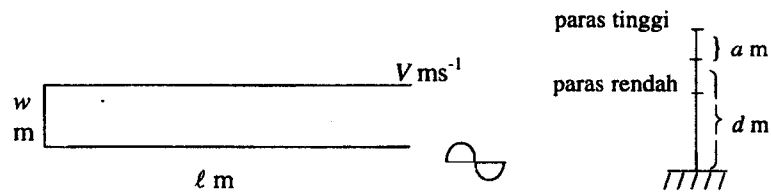
Masa: [3 jam]

**ARAHAN KEPADA CALON:**

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TIGA soalan di dalam EMPAT halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Pertimbangkan suatu selat dengan satu hujung tertutup dan satu yang lain terbuka kepada pasang surut.



Andaikan lebar selat ialah  $w$  m, panjang  $l$  m dan dalaman purata  $d$  m. Amplitud pasang surut ialah  $a$  m.

Pertimbangkan aliran air dari paras tertinggi ke paras paling rendah. Andaikan masa yang digunakan ialah  $T$ . Biarkan  $V$  sebagai halaju purata pada hujung terbuka dalam masa ini.

Dapatkan  $V$  dalam sebutan  $a$ ,  $l$ ,  $d$ ,  $T$ .

Jika  $a = 2$  m,  $l = 40$  km,  $d = 12$  m dan  $T = 6$  jam, cari  $V$ , dalam unit ms<sup>-1</sup>.

Jika halaju yang sebenar ialah suatu fungsi sinus, dapatkan fungsi ini berasaskan anggapan-anggapan di atas.

..2/-

- (b) Dapatkan persamaan gelombang tulen berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

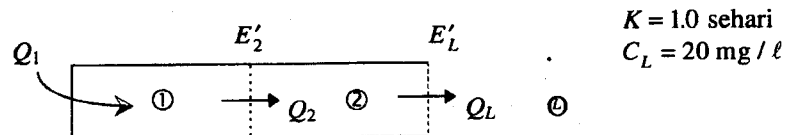
di mana  $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ , dan  $x, t$  ialah jarak dan masa masing-masing. Terangkan dengan jelas anggapan-anggapan yang digunakan dan berikan makna dan unit bagi setiap sebutan di atas.

Sekarang pertimbangkan suatu gelombang menjalar melalui suatu saluran seragam dengan kedua-dua hujung terbuka. Jika  $\eta = a \cos(\sigma t - kx)$ , dapatkan  $u$ . Apakah makna dan unit bagi  $\sigma, k$ ?

Jika diberikan  $h = 8.0 \text{ m}$ ,  $a = 1.0 \text{ m}$ , dan kalaan pasang surut ialah 12.42 jam, dapatkan  $\eta$  dan  $u$ . Apakah nilai  $\sigma, k$  dan panjang gelombang.

(100 markah)

2. (a) Misalkan suatu muara yang dibahagikan kepada dua bahagian ①, ② seperti berikut:



Bahagian ② adalah terbuka kepada laut ⊙ yang mempunyai suatu kimia dengan kepekatan malar  $C_L = 20 \text{ mg/l}$ , dan kadar reputan  $K = 1.0$  sehari. Isipadu bagi setiap bahagian adalah pada tahap malar  $V_1 = V_2 = 5 \times 10^5 \text{ m}^3$  masing-masing dan pekali sebaran di antara ①, ② dan ⊙ ialah  $E'_2 = E'_L = 10^4 \text{ m}^3$  sehari masing-masing.

Air bersih masuk ke dalam ① pada kadar  $Q_1 = 10^4 \text{ m}^3$  sehari.

Anggapkan keadaan mantap tercapai.

- (i) Berikan aliran  $Q_2$  dan  $Q_L$ .
- (ii) Biarkan  $C_1, C_2$  sebagai kepekatan dalam bahagian ① dan ② masing-masing.

Bentukkan sistem persamaan bagi  $C_1, C_2$  dengan mengambil kira aliran, sebaran dan reputan kimia dalam setiap bahagian.

..3/-

- (iii) Selesaikan (ii) untuk  $C_1, C_2$ .
- (iv) Bagi bahagian ① cari kadar ( $\text{kg } d^{-1}$ ) bahan kimia masuk dan keluar ① melalui aliran  $Q_1, Q_2$ , kadar reputan ( $\text{kg } d^{-1}$ ) dan kadar pertukaran ( $\text{kg } d^{-1}$ ) melalui sebaran  $E_2$ .
- (v) Tunjukkan bahawa keabadian jisim tercapai dalam bahagian ①.
- (vi) Adakah keabadian jisim juga tercapai dalam bahagian ②, dengan memberikan hujah-hujah.
- (b) Pertimbangkan persamaan sebaran keadaan mantap untuk suatu sungai seragam yang tercemar oleh suatu kimia

$$E \frac{d^2 C}{dx^2} - U \frac{dC}{dx} - KC = 0$$

tertakluk kepada syarat sempadan  $C \rightarrow 0$  apabila  $x \rightarrow \infty$  atau  $x \rightarrow -\infty$ .

Tunjukkan bahawa

$$C = \begin{cases} C_0 e^{m_1 x}, & \text{untuk } x \leq 0 \\ C_0 e^{m_2 x}, & \text{untuk } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{di mana } m_1 = \frac{U}{2E}(1+\alpha), \quad m_2 = \frac{U}{2E}(1-\alpha), \quad \alpha = \sqrt{1 + \frac{4KE}{U^2}}.$$

Jika kimia di atas dilepaskan ke dalam sungai pada  $x = 0$  dengan kadar malar  $W \text{ kgs}^{-1}$  tunjukkan bahawa

$$C_0 = \frac{W}{Q\alpha}$$

di mana  $Q \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$  ialah aliran sungai. Nyatakan unit-unit yang selaras untuk  $E, U, K$  dan  $C_0$ .

Andaikan  $K = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ,  $E = 8 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $U = 0.02 \text{ ms}^{-1}$  dan luas keratan-rentas ialah  $10^2 \text{ m}^2$ ,  $W = 10^{-2} \text{ kgs}^{-1}$ . Dapatkan  $C_0$  dalam unit  $\text{mg} / \ell$  dan lakarkan  $C$ , untuk  $x \geq 0$  dan  $x \leq 0$ .

(100 markah)

3. (a) Pertimbangkan persamaan penerobosan kemasinan di muara apabila keadaan mantap tercapai

$$E \frac{d^2 C}{dx^2} - U \frac{dC}{dx} = 0.$$

Apakah makna sebutan  $E$ ,  $U$  dan  $C$ . Dapatkan penyelesaian analitik jika syarat sempadan ialah

$$C(0) = C_0, \quad C(\ell) = 0.$$

Andaikan  $C_0 = 25000 \text{ mg/l}$ ,  $E = 30 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $U = -0.03 \text{ ms}^{-1}$ , dan  $\ell = 50 \text{ km}$ , dapatkan penyelesaian analitik di atas. Cari  $C$  pada  $x = 10, 20$  dan  $40 \text{ km}$  masing-masing. Jika  $U$  sekarang ialah  $U = -0.015 \text{ ms}^{-1}$ , apakah pula  $C$  di tempat-tempat yang sama. Lakarkan graf untuk kedua-dua  $C$  di atas pada rajah yang sama.

- (b) Apabila keadaan mantap tercapai, suatu model BOD-DO diberikan sebagai

$$-v \frac{d\ell}{dx} - k_r \ell = 0 \quad (3)$$

$$-v \frac{dc}{dx} - k_r \ell + k_a (c_s - c) = 0 \quad (4)$$

dengan syarat  $\ell = \ell_0$  dan  $c = c_0$  pada  $x = 0$ . Nyatakan apakah  $\ell$ ,  $c$ ,  $v$ ,  $k_r$ ,  $k_a$  dan  $c_s$  dan berikan unit bagi setiap. Berikan anggapan-anggapan terkandung di dalam model ini.

Tunjukkan bahawa penyelesaian (3) ialah

$$\ell = \ell_0 \exp\left(-k_r \frac{x}{v}\right) \quad (5)$$

Untuk menyelesaikan (4), biarkan

$$D = c_s - c, \quad \text{dan} \quad D_0 = c_s - c_0.$$

Dapatkan persamaan dalam  $D$  daripada (4), dan selanjutnya tunjukkan bahawa

$$D = \ell_0 \left( \frac{k_r}{k_a - k_r} \right) \left[ \exp\left(-k_r \frac{x}{v}\right) - \exp\left(-k_a \frac{x}{v}\right) \right] + D_0 \exp\left(-k_a \frac{x}{v}\right).$$

Lakarkan  $\ell$  dan  $D$  pada graf yang sama.

(100 markah)