UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 1999/2000

April 2000

<u>MSG 284 – Geometri Berkomputer</u>

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam TIGA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1.(a) (i) Buktikan bahawa

$$\frac{d}{dt} B_i^n(t) = n\left(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)\right)$$

di mana $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ adalah polinomial Bernstein.

(ii) Dengan menggunakan hasil bahagian (i), tunjukkan

$$\frac{d}{dt} r(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta V_i \, B_i^{n-1}(t)$$

di mana

$$r(t) = \sum_{i=0}^{n} V_i \, B_i^n(t) \quad \text{dan} \quad \Delta V_i = V_{i+1} - V_i .$$

(iii) Pertimbangkan dua lengkung Bézier

$$P(t) = \sum_{i=0}^{3} A_i \, B_i^3(t)$$

dan

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{3} W_i \, B_i^3(t), \quad t \in [0,1],$$

dengan A_i dan W_i masing-masing sebagai titik-titik kawalan.

Nyatakan hubungan di antara A_i dan W_i supaya kedua-dua lengkung tersebut bersambung secara

(i) C^0 (ii) G^1 (iii) C^1

(100/100)

...2/-

(b) Bincangkan bagaimana algoritma de Casteljau digunakan untuk menjana lengkung Bézier kubik

$$P(t) = \sum_{i=0}^{3} V_i \, B_i^3(t), \quad t \in [0,1],$$

di mana $V_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 0, 1, 2, 3$ merupakan titik kawalan.

(100/100)

2.(a) Andaikan $S(u, v)$ merupakan suatu permukaan,

$$E = \frac{\partial S}{\partial u} \cdot \frac{\partial S}{\partial u}, \qquad F = \frac{\partial S}{\partial u} \cdot \frac{\partial S}{\partial v}, \qquad G = \frac{\partial S}{\partial v} \cdot \frac{\partial S}{\partial v}$$

dan θ adalah sudut di antara $\frac{\partial S}{\partial u}$ dan $\frac{\partial S}{\partial v}$ dengan $\sin\theta \neq 0$.

(i) Buktikan $EG - F^2 > 0$

(ii) Tunjukkan bahawa

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}}.$$

(b) Lengkung kubik Ball ditulis sebagai

$$r(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)^2 P_1 + 2t^2(1-t)P_2 + t^2 P_3, \quad t \in [0,1].$$

(i) Bincangkan tentang sifat hul cembung bagi lengkung Ball ini.

(ii) Jika lengkung di atas ditulis dalam bentuk Bézier

$$r(t) = \sum_{i=0}^{3} V_i \, B_i^3(t), \quad t \in [0,1],$$

cari titik kawalan Bézier $\{V_i\}$ dalam bentuk titik kawalan Ball $\{P_i\}$.

(iii) Tunjukkan hubungan secara geometri di antara titik kawalan $\{V_i\}$ dan $\{P_i\}$ tersebut dengan melakarkan bersama-sama poligon kawalan yang berkenaan.

(iv) Di antara bentuk kubik Ball dan kubik Bézier, yang mana satukah anda lebih berminat menggunakannya? Berikan alasan untuk pilihan anda.

(100/100)

3.(a) Berikan matriks transformasi dalam koordinat homogen yang dapat menghasilkan transformasi berikut dalam $\mathbb{R}^2$:

Putarkan mengelilingi asalan sebanyak sudut $\frac{\pi}{4}$ dalam arah lawan jam dan kemudian sesarkan imej dengan sesaran (2, 1).

(b) Fungsi asas Hermit kubik, $H_0, H_1, \overline{H}_0$ dan $\overline{H}_1$ ditakrifkan sebagai

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3, \\ H_1(t) &= 3t^2 - 2t^3, \\ \overline{H}_0(t) &= t - 2t^2 + t^3, \\ \overline{H}_1(t) &= -t^2 + t^3, \qquad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

(i) Dapatkan nilai dan terbitan setiap fungsi di atas pada $t = 0$ dan $t = 1$.

(ii) Jika lengkung kubik $r(t)$ pada $[0,1]$ mempunyai $r(0) = A$, $r(1) = B$, $r'(0) = C$ dan $r'(1) = D$, tuliskan lengkung $r(t)$ dalam bentuk Hermite kubik.

(iii) Dengan menggunakan asas Hermite kubik dan data-data $\{ F, F_u, F_v, F_{uv} = 0 \}$ pada setiap bucu sempadan, bincangkan bagaimana kita dapat membina permukaan Coons $F(u,v)$, $0 \le u, v \le 1$.

(100/100)

4.(a) (i) Diberi titik $V_0, V_1, V_2 \in \mathbb{R}^2$ dan parameter $t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Dengan menggunakan polinomial Lagrange, tuliskan polinomial kuadratik $Q(t)$ yang memenuhi syarat

$$Q(t_i) = V_i, \qquad i = 0, 1, 2.$$

(ii) Dengan merujuk kepada contoh dalam bahagian (i), terangkan kaedah Lagrange untuk menjana satu cebis lengkung kuadratik yang melalui data yang diberi.

(iii) Bincangkan mengapa dalam penjanaan lengkung, fungsi splin lebih biasa digunakan daripada fungsi polinomial.

(b) Cebis polinomial ke-i lengkung splin-B kubik seragam ditulis sebagai

$$S_i(t) = \frac{1}{6}[t^3 \; t^2 \; t \; 1] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \\ V_{i+2} \\ V_{i+3} \end{bmatrix}$$

dengan $0 \le t \le 1$ dan V_j, $j = i, i+1, i+2, i+3$, sebagai titik kawalannya.

Buktikan cebis $S_i(t)$ dan cebis $S_{i+1}(t)$ bersambung dengan keselanjaran C^2.

(100/100)

-oooOooo-