

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1987/88

MKT545 - Fungsi Spline Dan Penggunaannya

Tarikh: 25 Oktober 1987

Masa: 9.00 pagi - 12.00 t/hari  
(3 jam)

Jawab semua soalan.

1. B-spline seragam darjah  $n$  yang ditandakan dengan  $M_n$  ditakrifkan sebagai

$$M_n(t) := \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} (t-i)_+^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

di mana

$$t_+^n = \begin{cases} t^n & , \quad t \geq 0 \\ 0 & , \quad t < 0. \end{cases}$$

Cari ungkapan-ungkapan bagi  $M_3(t)$  pada selang-selang  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(3, 4)$  dan  $(4, \infty)$ .

Cari hasil tambah  $M_3(t) + M_3(t+1) + M_3(t+2) + M_3(t+3)$  untuk  $t \in (0, 1)$ .

Katakan  $V_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = -3, -2, \dots, N-1$ , dan

$$\gamma(t) = \sum_{i=-3}^{N-1} V_i M_3(t-i) \quad t \in [0, N]$$

Terangkan apakah makna dan kepentingannya bahawa lengkungan  $\gamma(t)$  mempunyai

- (i) sifat hul cembung (convex hull property),
- (ii) sifat tempatan (local property),
- (iii) sifat variasi menyusut (variation diminishing property).

(100/100)

.../2

2. (a) Diberi titik-titik kawalan  $V_i \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = 0, \dots, N$ , kita boleh membentuk suatu lengkungan dengan menggunakan algoritma berikut:

$$(I) \quad b_{2i+v}^{(1)} := \frac{1}{2}(V_{i+v} + V_i), \quad \begin{array}{l} v = 0, i = 0, 1, \dots, N \\ v = 1, i = 0, 1, \dots, N-1 \end{array} \text{ atau}$$

(II) untuk  $p = 2, 3, 4$ ,

$$b_i^{(p)} := \frac{1}{2} \left( b_i^{(p-1)} + b_{i+1}^{(p-1)} \right), \quad i = 0, 1, \dots, 2N-p+1.$$

Katakan  $V_i^{(1)} = b_i^{(4)}$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2N-3$ .

Ulangkan langkah-langkah di atas dengan menggantikan  $V_i^{(n-1)}$

oleh  $V_i^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Apakah jenis lengkungan yang dihasilkan daripada algoritma tersebut?

(20/100)

(b) Tuliskan algoritma pembahagian untuk menghasilkan permukaan

$$S(x, y) = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} V_{i,j} M_3(x-i) M_3(y-j),$$

di mana  $M_3$  adalah B-spline kubik seragam.

(40/100)

(c) Katakan  $M_1$  menandakan B-spline seragam linear, dan andaikan

$$B_{2,2,0}(x, y) := M_1(x) M_1(y) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Tunjukkan bagaimana untuk mendapatkan suatu "box spline"  $B_{2,2,2}(x, y)$  darjah 4 pada suatu jaringan tiga arah.

Tuliskan algoritma pembahagian untuk menjanakan permukaan

$$S(x, y) = \sum V_{(i,j)} B_{2,2,2}(x-i, y-j).$$

(40/100)

3. Katakan  $(t_i)_{i=1}^{m+n}$  adalah suatu jujukan di mana  $t_i < t_{i+1}$ , dan  $(\tau_i)_{i=1}^{m+n+1}$  adalah suatu penghalusan (refinement) bagi  $(t_i)_{i=1}^{m+n}$  supaya

$$\tau_i = t_i \quad \text{untuk} \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$t_k < \tau_{k+1} < t_{k+1} \quad (k \text{ tetap})$$

dan  $\tau_{i+1} = t_i \quad \text{untuk} \quad i = k+1, \dots, m+n.$

Maka kita dapat menulis

$$N(t|t_i, \dots, t_{i+n}) = \sum_{j=1}^{m+1} \beta_{ij}^n N(t|\tau_j, \dots, \tau_{j+n}), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

di mana  $\beta_{ij}^n$  adalah pemalar-pemalar.

- (a) Apakah nilai-nilai  $\beta_{ij}^n$  jika  $i \leq k - n$  atau  $i \geq k + 1$ ?
- (b) Apakah nilai-nilai  $\beta_{ij}^n$  jika  $k - n + 1 \leq i \leq k$ ,  $j \leq i - 1$  atau  $j \geq i + 2$ ?
- (c) Tunjukkan bahawa untuk  $k - n + 1 \leq i \leq k$

$$\beta_{ij}^n = \left( \frac{t_{i+n} - \tau_{j+n-1}}{t_{i+n} - t_{i+1}} \right) \beta_{i+1j}^{n-1} + \left( \frac{\tau_{j+n-1} - t_i}{t_{i+n-1} - t_i} \right) \beta_{ij}^{n-1}.$$

Seterusnya tuliskan pekali-pekali bagi  $\beta_{i+1j}^{n-1}$  dan  $\beta_{ij}^{n-1}$  di sebelah kanan dalam sebutan  $\tau$ .

(100/100)

4. (a) Katakan  $P(t) = (X(t), Y(t))$ , di mana  $X(t) = t^3 + a_1(t - 1)_+^2$  dan  $Y(t) = t^3 - (t - 1)_+^3 + a_2(t - 1)_+^2$ . Tunjukkan bahawa lengkungan  $P(t)$  mempunyai keselanjaran  $C^1$  pada  $t = 1$ . Cari hubungan di antara  $a_1$  dan  $a_2$  supaya  $P(t)$  juga mempunyai keselanjaran kelengkungan (curvature continuity) pada  $t = 1$ .

(60/100)

