MAT 402

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1987/88

MKT542 - Pemodelan Berangka

Tarikh: 5 November 1987

Masa: 9.00 pagi. - 12.00 t/hari.
( 3 jam )

Jawab EMPAT soalan.

1. (a) Takrifkan sebutan "tentu positif" untuk suatu matriks $A_{nxn}$. Tunjukkan bahawa Kriteria Sylvester setara dengan syarat

$$a_{kk}^{(k)} > 0 , \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

dengan $a_{kk}^{(k)}$ sebagai unsur pangsi yang dihasilkan melalui proses penghapusan Gauss. Tentukan sama ada matriks yang berikut tentu positif atau tidak:

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

(35/100)

(b) Andaikan bahawa

(i) A adalah suatu matriks bersimetri dan tentu positif,

(ii) L adalah suatu matriks segitiga bawah dengan unsur-unsur pepenjuru yang positif.

Diberi matriks A, buktikan bahawa ∃ matriks L yang unik supaya

$$A = LL^T.$$

(40/100)

(c) Terangkan secara ringkas tiga skema untuk storan yang cekap bagi unsur-unsur matriks luang.

(25/100)

.../2

2. (a) Pertimbangkan sistem persamaan linear

$$\underset{\sim}{x} = B\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{f}$$

dengan B sebagai suatu matriks dan $\underset{\sim}{x}$, $\underset{\sim}{f}$ vektor-vektor. Andaikan bahawa $\{\underset{\sim}{x}^{(k)}\}$ adalah jujukan penghampiran kepada penyelesaian $\underset{\sim}{x}^*$ yang dihasilkan melalui skema pelelaran

$$\underset{\sim}{x}^{(k+1)} = B\underset{\sim}{x}^{(k)} + \underset{\sim}{f}.$$

Jika $||B|| = q < 1$, buktikan bahawa

(i) $\{\underset{\sim}{x}^{(k)}\}$ menumpu kepada $\underset{\sim}{x}^*$

(ii) $||\underset{\sim}{x}^* - \underset{\sim}{x}^{(k)}|| \leq \frac{q^k}{1 - q} ||\underset{\sim}{x}^{(1)} - \underset{\sim}{x}^{(0)}||$.

*(50/100)*

(b) Terangkan idea asas untuk kaedah SOR. Tunjukkan bahawa skema pelelaran SOR untuk sistem persamaan linear

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$$

adalah

$$\underset{\sim}{x}^{(k+1)} = L_\omega \underset{\sim}{x}^{(k)} + \underset{\sim}{f}$$

dengan
$$\underset{\sim}{f} = \omega(D - \omega L)^{-1}\underset{\sim}{b}$$
$$L_\omega = (D - \omega L)^{-1} [(1 - \omega)D + \omega U],$$
$$D = \text{diag}(a_{ii}), \quad i = 1, \ldots, n$$
U = suatu matriks segitiga atas

$\omega$ = parameter nyata

Nyatakan suatu syarat cukup dan perlu untuk penumpuan kaedah SOR. Jika $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ($a_{ij}$ adalah unsur A) dan kaedah SOR menumpu, buktikan bahawa parameter $\omega$ memenuhi syarat

$$0 < \omega < 2.$$

*(50/100)*

3. (a) Buktikan bahawa, di bawah syarat-syarat tertentu, kaedah Newton

$$\underset{\sim}{x}^{(k+1)} = \underset{\sim}{x}^{(k)} - [J(\underset{\sim}{x}^{(k)})]^{-1} \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^{(k)})$$

untuk menyelesaikan sistem persamaan tak linear $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = 0$ menumpu kepada penyelesaian $\underset{\sim}{x}^*$. J adalah matriks Jacobi. Apakah kelemahan dan kebaikan kaedah ini?

*(40/100)*

.../3

(b) Terangkan secara terperinci kaedah Brown untuk penyelesaian sistem persamaan tak linear.

(Perbincangan anda harus termasuk idea asas kaedah, penumpuan kaedah, hal-hal yang perlu ditimbangkan semasa implementasi algoritmanya, dan lain-lain).

*(60/100)*

4. (a) Takrifkan set selang-seli $\{x_1, \ldots, x_n\}$ bagi suatu fungsi $f \in C[a, b]$.

Andaikan bahawa $f \in C[a, b]$ dan $p \in P_n$ dengan $P_n = \text{Span}\{1, x, \ldots, x^n\}$.

Buktikan bahawa p merupakan penghampiran seragam terbaik jika $(f - p)$ mempunyai suatu set selang-seli pada $[a, b]$ dan set ini mempunyai sekurang-kurangnya $(n + 2)$ titik.

*(50/100)*

(b) Andaikan $f \in C^2[a, b]$ dengan $f''(x) > 0$ bagi $x \in [a, b]$. Tentukan polinomial penghampiran terbaik $p(x) = a_o + a_1 x$ bagi fungsi f pada selang $[a, b]$.

*(30/100)*

(c) Pertimbangkan $f(x) = xe^x$, $x \in [0, 1.5]$. Tentukan titik-titik $x_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, supaya f boleh dihampirkan pada selang $[0, 1.5]$ dengan suatu polinomial $p_3(x)$ supaya ralat interpolasi diminimumkan.

(Polinomial Chebyshev : $T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$, $x \in [-1, 1]$)

*(20/100)*

5. (a) Gunakan teknik penghampiran Padé untuk menentukan fungsi nisbah

$$r(x) = \frac{p_o + p_2 x^2 + p_4 x^4}{1 + q_2 x^2}$$

supaya menghampirkan $f(x) = \cos x$.

*(15/100)*

(b) Buktikan bahawa suatu set titik $\{x_1, \ldots, x_n\}$ merupakan set titik Gauss pada selang $[a, b]$ jika dan hanya jika

$$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

.../4

adalah suatu polinomial ortogon pada [a, b].

Buktikan bahawa rumus quadrature Gauss adalah stabil.

*(55/100)*

(c) Dapatkan rumus quadrature Gauss 2-titik untuk

$$I = \int_0^1 f(x)\ \ell n\left(\frac{1}{x}\right) dx .$$

$\left[\text{Polinomial ortogon dengan darjah 2 terhadap fungsi pemberat } \ell n\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pada } [0,\ 1] \text{ adalah } \Psi_2(x) = \sqrt{\frac{226800}{647}}\ \left(x^2 - \frac{5}{7}x + \frac{17}{252}\right)\right].$

*(10/100)*

(d) Kaedah quadrature Lobatto adalah suatu pengubahsuaian quadrature Gauss yang menggunakan titik-titik hujung $\pm 1$ sebagai titik-titik quadrature.

Apakah darjah kejituan bagi suatu rumus Lobatto dengan n-titik?

Andaikan bahawa selang pengkamiran adalah [-1, 1]. Tentukan rumus Lobatto 3-titik bagi selang ini.

*(20/100)*

- oooOOooo -