

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1995/96

Mac/April 1996

MKT 443 - Pemodelan Matematik

Masa : [3 jam]

Jawab SEMUA TIGA (3) soalan.

Tukaran Unit

1 batu = 5280 kaki ;

1 kaki = 0.3048 meter ;

1 MGD = 0.05262 m³/s ;

1 galon = 4.546 liter ;

1 lb = 0.4536 kg ;

1 kg = 10⁶ mg = 10⁹ µg ;

g = 9.81 m/s².

1. (a) Melalui prinsip asas, perolehi model pasang-surut ringkas

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (1),$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

di mana u (m/s) ialah halaju, dan η (m) paras air di atas paras air purata. Berikan unit bagi setiap simbol dan nyatakan dengan jelas anggapan-anggapan yang digunakan.

- (i) Sahkan bahawa gelombang menjalar

$$\eta = a \cos(\sigma t - kx), \quad u = a \sqrt{\frac{g}{h}} \cos(\sigma t - kx)$$

adalah satu penyelesaian, jika $\sigma^2 = gh k^2$.

- (ii) Apakah maksud dan unit bagi σ, k ?

.../2

- (iii) Satu saluran seragam mempunyai dalaman purata 12 m dengan kedua-dua hujungnya terbuka kepada pasang-surut berkalaan 12.42 jam. Dapatkan dan perihalkan pasang-surut ini jika amplitudnya ialah 1.0 m. Apakah panjang gelombangnya?

- (b) Sekarang persamaan (1) di atas diubahsuai kepada

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + Ru = 0 \quad (3)$$

manakala (2) dikekalkan.

- (i) Apakah sebutan Ru ?
- (ii) Tunjukkan bahawa berikut adalah satu penyelesaian:

$$u = ae^{-\beta x} \cos(\sigma t - kx + \alpha)$$

$$\eta = abe^{-\beta x} \cos(\sigma t - kx) \text{ di mana}$$

$$k^2 = \frac{\sigma^2}{gh} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{R^2}{\sigma^2}} \right),$$

$$\beta = \frac{R\sigma}{2ghk}, \text{ dan}$$

$$\tan \alpha = \frac{\beta}{k}, \quad b = \frac{kh}{\sigma \cos \alpha}.$$

- (iii) Bagi suatu pasang-surut berkalaan 12.42 jam dengan amplitud 1.0 m pada $x = 0$, dan dalaman purata 12 m, $R = 2.0 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, cari nombor gelombang k , panjang gelombang dan α . Lakarkan graf bagi u dan η dalam satu rajah sepunya.
- (c) Berikan suatu skema berangka untuk mencari penyelesaian bagi pasang-surut (2) dan (3) di atas, dengan butir-butir jelas mengenai syarat awal dan syarat sempadan. Andaikan syarat sempadan adalah berkalaan 12.42 jam, dan $R = 2.0 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, adakah nilai awal akan lenyap dan berapa cepatkah keadaan mantap tercapai?

(100/100)

.../3

2. (a) Suatu persamaan aliran-sebaran diberikan oleh

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u \frac{\partial c}{\partial x} + E \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - kc + w,$$

di mana unit-unit asas ialah meter (m), saat (s) dan kilogram (kg). Berikan maksud dan unit bagi sebutan c , u , E , k dan w masing-masing.

- (b) Jika dianggapkan $E = 0$ dan keadaan mantap tercapai maka didapati

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + kc = w \quad c(0) = c_0.$$

Mulai dari prinsip-prinsip asas, terbitkan persamaan di atas, dengan menyatakan anggapan-anggapan yang digunakan. Anggapkan bahawa semua pekali malar, maka dapatkan penyelesaian,

$$c(x) = c_0 e^{-\frac{k}{u}x} + \frac{w}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{u}x} \right).$$

Lakarkan graf c , dengan butir-butir jelas bagi keadaan apabila $x \rightarrow \infty$.

Andaikan suatu bahan kimia dengan $k = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ dilepaskan ke dalam suatu sungai pada kadar 1.5 kg setiap meter panjang sehari, dan sungai mempunyai luas keratan rentas 50 m^2 dan aliran $5 \text{ m}^3/\text{s}$. Apakah kepekatan apabila $x \rightarrow \infty$? Adakah nilai ini bergantung kepada nilai awal c_0 ?

- (c) Kembali kepada bahagian (a). Jika sekarang $k = 0$, $w = 0$, dan keadaan mantap tercapai, maka kita dapat persamaan (penerobosan kemasinan) berikut

$$E \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - u \frac{\partial c}{\partial x} = 0,$$

tertakluk kepada syarat sempadan

$$c(0) = c_0, \quad c(\ell) = 0.$$

Dapatkan penyelesaian dalam bentuk analitik, jika diandaikan E dan u malar. Sekarang diberikan $E = 30 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $u = -0.03 \text{ ms}^{-1}$, $\ell = 48 \text{ km}$, dan $c_0 = 27,000 \text{ mg}/\ell$, cari nilai c pada $x = 10, 20, 40 \text{ km}$ dan lakarkan graf bagi c .

Jika halaju u digandadukan, cari nilai c pada tempat-tempat yang sama.

.../4

di mana ℓ = kepekatan BOD, c = kepekatan DO, kedua-duanya dalam unit mg/l. Nyatakan maksud dan unit bagi v , k_r , k_a , c_s masing-masing.

Jika pada $x = 0$, syarat awal ialah

$$\ell = \ell_0, c = c_0,$$

tunjukkan bahawa

$$\ell = \ell_0 \exp\left(-\frac{k_r}{v} x\right), \quad \text{dan}$$

$$D = \ell_0 \left(\frac{k_r}{k_a - k_r}\right) \left\{ \exp\left(-\frac{k_r}{v} x\right) - \exp\left(-\frac{k_a}{v} x\right) \right\} \\ + D_0 \exp\left(-\frac{k_a}{v} x\right),$$

di mana $D = c_s - c$, $D_0 = c_s - c_0$.

Lakarkan graf bagi ℓ dan D dalam satu rajah.

(100/100)

- oooOOooo -