UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1987/88

MKT 353 - Teknik Kuantitatif Untuk Pengurusan II

Tarikh: 2 November 1987

Masa: 2.15 petang - 5.15 petang
(3 jam)

Jawab mana-mana EMPAT soalan. SEMUA soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia

1. (a) Sebuah bank cawangan mempunyai seorang penerima dan pembayar wang yang berupaya mengendalikan seramai 60 pelanggan sejam pada puratanya. Masa layan sebenar adalah mengikut agihan eksponen. Pelanggan tiba di bank mengikut proses Poisson dengan kadar min 48 sejam.

   (i) Berapakah bilangan purata pelanggan yang berada di bank pada sesuatu masa?

   (ii) Berapa lamakah dijangka setiap pelanggan akan berada di bank?

   (iii) Berapakah peratusan masa penerima dan pembayar wang itu akan bersenang?

   (iv) Berapakah nilai kebarangkalian seseorang pelanggan itu terpaksa menunggu lebih dari 10 minit untuk menerima khidmat?

   (v) Berapakah purata masa menunggu untuk menerima khidmat?

(40/100)

.../2

(b) Pertimbangkan soalan 1(a) di atas. Katakan bank melantik seorang lagi penerima dan pembayar wang yang sama cekap dan juga berupaya mengendalikan seramai 60 pelanggan sejam pada puratanya.

(i) Berapakah purata masa menunggu untuk menerima khidmat?

(ii) Tentukan kebarangkalian seseorang pelanggan akan menunggu lebih dari 1 minit sebelum dilayan.

(iii) Tentukan kebarangkalian seseorang penerima dan pembayar wang itu akan bersenang.

(30/100)

(c) Pertimbangkan suatu sistem giliran yang mempunyai satu saluran sahaja. Dari tinjauan yang telah dijalankan, data berikut diperolehi

bilangan pelanggan di dalam sistem	kekerapan
0	900
1	821
2	658
3	621
4	503
5	420
6	302
7	252
8	181
9	152

(Data untuk bilangan pelanggan di dalam sistem yang melebihi 9 tidak disenaraikan di atas.)

(i) Tunjukkan bahawa data ini menyokong hipotesis berikut:

"Sistem giliran ini adalah model M/M/1"

(ii) Apakah faktor manfaat bagi sistem itu?

(30/100)

.../3

2. (a) Sebuah pejabat cawangan MAS dikendalikan oleh dua orang pegawai yang sama cekap dan masing-masing berupaya mengendalikan 4 orang pelanggan sejam pada puratanya. Masa layan sebenar adalah mengikut agihan eksponen. Daripada data yang diperolehi, didapati bahawa pelanggan tiba mengikut proses Poisson. Jika bilangan pelanggan yang sedang menunggu tidak melebihi seorang, kadar ketibaan ialah 8 orang sejam. Jika bilangan pelanggan yang sedang menunggu adalah dua orang, kadar ketibaan ialah 4 orang sejam. Jika seseorang pelanggan tiba dan didapatinya terdapat tiga orang yang sedang menunggu, dia akan pergi ke tempat lain untuk dilayan.

(i) Tentukan λ_n dan μ_n .

(ii) Lukiskan gambarajah kadar untuk sistem ini.

(iii) Tentukan bilangan jangkaan pelanggan yang sedang menunggu.

(iv) Tentukan masa purata seseorang pelanggan itu terpaksa menunggu.

(50/100)

(b) (i) Pertimbangkan suatu sistem giliran yang mempunyai satu pelayan. Kadar ketibaan pelanggan berlaku mengikut proses Poisson dengan min λ . Jika seorang pelanggan tiba dan didapatinya terdapat K pelanggan di dalam sistem, dia akan pergi ke tempat lain untuk dilayan. Masa layan adalah mengikut agihan eksponen dengan min $1/\mu$. Tunjukkan bahawa bilangan jangkaan pelanggan yang masuk ke sistem giliran ini per unit masa ialah

$$\lambda \left[\frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}} \right]$$

.../4

(ii) Sistem giliran di bahagian b(i) di atas adalah merupakan sebuah stesyen mencuci kereta dengan $K=2$ dan $\mu=30$ per jam. Untuk memperbaiki stesyen itu, dua alternatif pengubahsuaian telah dicadangkan;

Cadangan I: melibatkan pembelian ruang tambahan supaya $K=3$.

Cadangan II: melibatkan penggantian mesin semasa dengan sebuah mesin baru yang lebih cepat supaya $\mu=40$ sejam

Jika $\lambda=10$ sejam, dan keuntungan purata per pelanggan adalah malar, cadangan yang manakah akan menghasilkan keuntungan tambahan yang lebih tinggi?

(50/100)

3. (a) Ketibaan bas-bas ke bengkel untuk diservis berlaku mengikut proses Poisson dengan kadar min sebanyak 5 sehari. Bengkel itu mempunyai seorang mekanik yang berupaya melakukan servis terhadap 6 buah bas sehari pada puratanya. Masa servis sebenar adalah mengikut agihan eksponen. Kos, termasuk gaji mekanik itu, yang perlu dibayar oleh syarikat bas untuk mengendalikan bengkel adalah sebanyak $200 sehari. Untuk setiap hari sesebuah bas itu berada di bengkel, syarikat bas akan kerugian $100. Pengurus syarikat bas itu boleh melantik seorang lagi mekanik yang sama cekap (juga berupaya melakukan servis terhadap 6 buah bas sehari pada puratanya). Jika gaji harian mekanik baru ialah $20, adakah perlantikan mekanik baru itu wajar dilakukan?

(40/100)

(b) Sebuah kren digunakan untuk mengendali 5 buah mesin. Apabila sesebuah mesin selesai memproses muatannya, kren itu akan dipanggil untuk mengangkat muatan yang telah siap diproses itu dan kemudiannya memuatkan mesin itu dengan muatan yang baru yang diambil dari tempat simpanan yang berdekatan. Masa memproses sesuatu muatan oleh mesin-mesin yang ada adalah mengikut agihan eksponen dengan min 25 minit. Masa dari antara kren

.../5

mula bergerak untuk memberi khidmat kepada sesebuah mesin sehingga muatan baru siap dimuatkan adalah eksponen dengan min 10 minit.

(i) Tentukan peratusan masa bersenang kren itu.

(ii) Berapakah bilangan purata mesin yang sedang menunggu khidmat kren?

(30/100)

(c) Pertimbangkan suatu sistem giliran berketentuan dengan lat ketibaan, $1/\lambda$ = 4 minit; masa layan, $1/\mu$ = 8 minit dan had kepada sistem ialah 5 pelanggan.

(i) Tentukan waktu keengganan pertama berlaku.

(ii) Tentukan, $n(t)$, bilangan pelanggan di dalam sistem pada waktu t.

(30/100)

4. (a) Tulis karangan pendek bagi menjelaskan setiap istilah berikut:

(i) Simulasi

(ii) Proses Lahir-Mati

(iii) Penjana proses

(20/100)

(b) Sebuah bengkel mempunyai sebuah kren. Peratusan masa bersenang kren itu ialah 25%. Daripada tinjauan, didapati min masa khidmat ialah 10.5 minit, dengan varians 77.5 minit^2.

(i) Tentukan min kadar panggilan untuk khidmat kren itu.

(ii) Berapakah purata masa menunggu untuk khidmat kren?

.../6

(iii) Jika min masa khidmat disusutkan menjadi 8 minit, dengan varians 36 $minit^2$, berapakah purata masa menunggu untuk khidmat kren itu?

(40/100)

(c) Pertimbangkan satu sistem giliran yang mempunyai satu pelayan. Ketibaan pelanggan didapati berlaku mengikut agihan Poisson dengan kadar min 5 sejam.

(i) Jika masa layan adalah mengikut agihan seragam dari 2 minit ke 12 minit,

(A) berapakah bilangan purata pelanggan yang sedang menunggu untuk dilayan?

(B) berapakah purata masa menunggu untuk menerima khidmat?

(ii) Jika masa layan adalah diskrit dengan nilai 2, 4, 5, 8 dan 10 minit, dan kebarangkalian masing-masingnya adalah 0.1, 0.2, 0.3, 0.25, dan 0.15,

(A) berapakah bilangan purata pelanggan di dalam sistem giliran itu?

(B) berapa lamakah dijangka setiap pelanggan akan berada di dalam sistem?

(40/100)

5. (a) Pertimbangkan satu sistem giliran yang mempunyai satu pelayan. Daripada tinjauan yang telah dijalankan, data berikut diperolehi:

masa layan t (minit)	bilangan layanan
$0.5 \leq t < 1.5$	5
$1.5 \leq t < 2.5$	10
$2.5 \leq t < 3.5$	25
$3.5 \leq t < 4.5$	15
$4.5 \leq t < 5.5$	5
$5.5 \leq t < 6.5$	2

Ketibaan pelanggan berlaku mengikut agihan Poisson dengan kadar min 12 sejam. Dengan mempertimbangkan sistem ini sebagai model $M/E_k/1$, tentukan

(i) bilangan purata pelanggan yang berada di dalam sistem pada sesuatu masa;

(ii) purata masa menunggu untuk menerima khidmat.

(30/100)

(b) Pertimbangkan suatu sistem giliran yang mempunyai satu pelayan sahaja. Daripada tinjauan yang telah dijalankan, data berikut diperolehi:

lat ketibaan (minit)	kekerapan
7	8
8	9
9	12
10	14
11	7
Jumlah	50

masa layan (minit)	kekerapan
8	3
9	5
10	8
11	22
12	8
13	4
Jumlah	50

Andaikan bahawa pelanggan pertama tiba pada waktu 0 minit. Simulasikan sistem ini untuk 10 pelanggan dan tentukan

.../8

(i) purata masa menunggu;

(ii) peratusan masa bersenang pelayan sistem itu.

(Untuk penjanaan nombor rawak, ambil dua digit pertama lajur pertama dan baca daripada atas ke bawah.)

(70/100)

oooooOOOOOooooo

244

Rumus-rumus bagi Teorem Giliran:

1. M/M/1 :

$$\rho = \lambda/\mu$$

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n \qquad \text{untuk} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad , \qquad W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$P[W > t] = e^{-t/W}$$

$$P[W_q > t] = \rho e^{-t/W}$$

2. M/M/s :

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

$$P_0 = \left[\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \; \frac{1}{(1 - \rho)} + \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 & , \quad \text{jika} \quad 0 \leqslant n \leqslant s \\[2ex] \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{s! \; s^{n-s}} P_0 & , \quad \text{jika} \quad n \geqslant s \end{cases}$$

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s! \; (1 - \rho)^2} P_0$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad , \quad W = W_q + 1/\mu$$

$$L = L_q + \lambda/\mu$$

$$P[W_q > t] = \frac{P_0 \; s\mu \; (\lambda/\mu)^s}{s!(s\mu - \lambda)} \; e^{-(s\mu-\lambda)t}$$

3. M/M/s/∞/M/FIFO:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \binom{M}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^{M} \binom{M}{n} \frac{n!}{s^{n-s} \; s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} P_0 \binom{M}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & , \text{ jika } 0 \leq n \leq s \\ P_0 \binom{M}{n} \frac{n!}{s^{n-s} \; s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & , \text{ jika } s \leq n \leq M \\ 0 & , \text{ jika } n > M \end{cases}$$

$$L = P_0 \left[\sum_{n=0}^{s-1} n\binom{M}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^{m} n\binom{M}{n} \frac{n!}{s^{n-s} \; s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]$$

$$L_q = L - s + P_0 \sum_{n=0}^{s-1} (s-n) \binom{M}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$W = \frac{L}{\lambda(M - L)} \quad , \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda(M - L)}$$

4. M/G/1 :

$$P_0 = 1 - \rho$$

$$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)}$$

246

$$L = \rho + L_q$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad , \qquad W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

5. $M/E_k/1$:

$$L_q = \frac{1+k}{2k} \; \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W_q = \frac{1+k}{2k} \; \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$w = W_q + 1/\mu$$

$$L = \lambda W$$

6. Model M/M/1/k

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{k+1}} & (\rho \neq 1) \\ \dfrac{1}{k+1} & (\rho = 1) \end{cases}$$

Untuk $\rho \neq 1$

$$L = \frac{\rho[1 - (k+1)\rho^k + k\rho^{k+1}]}{(1-\rho^{k+1})(1-\rho)}$$

$$L_q = L - (1 - P_0) = L - \frac{\rho(1-\rho^k)}{1-\rho^{k+1}}$$

$$W = L/\lambda' \quad , \qquad \lambda' = \mu(L - L_q)$$

$$W_q = W - 1/\mu = L_q/\lambda'$$

247

Untuk $\rho = 1$

$$L = \frac{k}{2}$$

7. Model M/M/s/k :

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & (0 \leqslant n < s) \\[2ex] \dfrac{1}{s^{n-s}\; s!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & (s \leqslant n \leqslant k) \end{cases}$$

$$P_0 = \begin{cases} \left[\sum\limits_{n=0}^{s-1} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n + \dfrac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\,\dfrac{1 - \left(\dfrac{\lambda}{s\mu}\right)^{k-s+1}}{1 - \lambda/s\mu}\right]^{-1} & (\lambda/s\mu \neq 1) \\[3ex] \left[\sum\limits_{n=0}^{s-1} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n + \dfrac{(\lambda/\mu)^s}{s!}(k - s + 1)\right]^{-1} & (\lambda/s\mu = 1) \end{cases}$$

$$L_q = \frac{P_0 (s\rho)^s \rho}{s!(1-\rho)^2}\left[1 - \rho^{k-s+1} - (1-\rho)(k - s + 1)\rho^{k-s}\right]$$

$$L = L_q + s - P_0 \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(s-n)(\rho s)^n}{n!}$$

$$W = \frac{L}{\lambda'} \quad , \qquad \lambda' = \lambda(1 - P_k)$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda'}$$

8. Model M/M/s/s :

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n/n!}{\sum\limits_{i=0}^{s} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^i \Big/ i!} \qquad (0 \leqslant n \leqslant s)$$

$$P_s = \frac{(s\rho)^s/s!}{\sum_{i=0}^{s} (s\rho)^i/i!} \qquad (\rho = \lambda/s\mu)$$

9. Model M/M/∞ :

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n \, e^{-\lambda/\mu}}{n!} \qquad (n \geq 0)$$

$$L = \lambda/\mu \qquad W = \frac{1}{\mu}$$

10. Layanan Berkeadaan

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_1 & (1 \leq n \leq k) \\ \mu & (n \geq k) \end{cases}$$

$$P_0 = \left[\frac{1 - \rho_1^{\,k}}{1 - \rho_1} + \frac{\rho \rho_1^{\,k-1}}{1 - \rho} \right]^{-1} \qquad (\rho_1 = \lambda/\mu_1, \; \rho = \lambda/\mu < 1)$$

$$L = P_0 \, \frac{\rho_1 [1 + (k-1)\rho_1^{\,k} - k\rho_1^{\,k-1}]}{(1 - \rho_1)^2} + \frac{\rho \rho_1^{\,k-1} [k - (k-1)\rho]}{(1 - \rho)^2}$$

$$L_q = L - (1 - P_0)$$

$$W = \frac{L}{\lambda} \qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1 - P_0}{\lambda}$$

Appendix A

Table of Random Digits

32401	40830	14246	08752	94925	96086	35237	46855	76558
09731	08885	60220	40450	37321	95662	13383	27164	94826
83747	73458	62366	66463	74708	78773	52429	26594	22809
67137	95522	86260	70028	98027	71461	16046	45275	88972
95773	05709	97664	93758	13929	94348	10355	32845	79749
13844	79660	71124	42641	44368	53247	77693	71811	36458
47565	37306	02406	47071	35449	63564	39518	62144	61311
18165	30675	14805	95632	42107	47284	56234	12155	81420
45751	03186	23684	16532	89810	45083	00257	56977	99078
91189	69779	26006	77556	65161	77167	86884	63533	38061
81999	05276	26755	15617	35290	60106	84142	67759	77912
15795	40504	23807	59882	29071	62651	58724	27660	30907
60363	58117	94830	48602	43856	87326	20482	93968	37925
58066	00725	09020	30999	76634	57690	03585	47171	29745
57885	79641	74665	02132	32738	91602	03739	54365	98932
60756	23725	59307	49084	95695	23735	56725	18046	07684
35793	23872	73484	55266	79706	95673	15740	10521	33084
22677	05593	20006	08199	55482	45030	64291	88969	34247
33411	60078	62924	18063	35291	33671	25871	44615	34885
94000	69875	88590	96892	20265	17928	35123	08059	71325
17990	09915	47822	29061	06075	53158	42164	59413	11673
83498	37258	98547	28526	87287	34239	32115	47854	97573
60301	76244	44852	54800	52367	27623	01178	23326	11954
58260	60782	51336	99012	49500	62487	02823	26546	96545
54897	17085	48926	47621	75135	35425	71769	30397	83780
38368	80486	00875	00532	21040	17097	10176	00100	51598
71622	30436	94100	64259	26043	83965	68711	31710	65040
52890	60588	47356	03363	77245	49128	13677	16095	16016

Agihan Erlang jenis k

Min $= \dfrac{1}{\mu}$

Mod $= \dfrac{(k - 1)}{\mu k}$

Varians $= \dfrac{1}{k\mu^2}$