UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua

Sidang Akademik 1995/96

Mac/April 1996

MAT 420 - Persamaan Pembezaan Separa

Masa : [3 jam]

Jawab **semua** soalan.

1. Selesaikan:
i)

$$(x^2+y^2)u_x + 2xyu_y = u$$

diberi bahawa $u = \exp(-\frac{5}{y})$ apabila $x = 0$.

ii)

$$x^3u_x + y(3x^2+y)u_y = (2x^2+y)u$$

tertakluk kepada syarat bahawa
$u = y^2 + y$ apabila $x = 1$.

2. Diberi persamaan haba

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \leq x \leq l$$

dengan syarat-syarat

$$u_x(0,t) = 0 = u_x(l,t)$$

$$u(x,0) = \phi(x)$$

Dengan menggunakan Jelmaan Kosinus Terhingga, tunjukkan bahawa penyelesaian boleh ditulis seperti

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Phi_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \Phi_p \exp(-p^2\pi^2 t/l^2) \cos\frac{p\pi x}{l}$$

Jika dalam penyelesaian di atas kita biar $l \to \infty$ serta membuat anggapan tertentu, dapatkan penyelesaian baru.

3. Gunakan kaedah pemisahan pembolehubah-pembolehubah untuk mendapatkan penyelesaian kepada persamaan gelombang

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

dengan syarat-syarat awal Cauchy

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x)$$

dalam selang $(0, L)$. Pada titik-titik penghujung selang, gunakan syarat-syarat sempadan

$$u_x(x,0) = 0, \qquad u_x(x,L) = 0.$$

Dengan membina perluasan kalaan yang sesuai untuk $f(x)$ dan $g(x)$ seperti terkandung dalam siri Fourier, tuliskan penyelesaian kepada masalah nilai sempadan ini dalam bentuk penyelesaian d'Alembert.

4. i) Nyatakan rantau-rantau atas satah x-y di mana persamaan

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} + x u_x - y u_y = 0$$

hiperbolik,parabolik and eliptik.

ii)Pertimbangkan persamaan berikut

$$L(\phi) = x^2\phi_{xx} + 3x\phi_{xy} - 4\phi_{yy} + x\phi_x = 0.$$

Letakkan persamaan ini dalam bentuk kanonik.

5. Gunakan Jelmaan Sinus untuk menyelesaikan persamaan gelombang atas selang $0 \leq x \leq \infty$ tertakluk kepada syarat-syarat $y(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = g(x)$, untuk semua x ; $y(0,t) = 0$ dan $y \to 0$, $\frac{\partial y}{\partial x} \to 0$ apabila $x \to \infty$ untuk semua t. Tunjukkan bahawa, apabila $x > ct$, penyelesaian d'Alembert boleh digunakan, tetapi apabila $x < ct$, penyelesaian adalah

$$\frac{1}{2}\{f(ct+x) - f(ct-x)\} + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{ct+x} g(x')dx'$$

oo0oo

Rumus-rumus

1. Siri Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l})$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

2. Jelmaan:

$$F_c(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos(px)dx$$

$$F_s(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(px) dx$$

3. Jelmaan Sinus:

$$\frac{df}{dx} \rightarrow -pF_c(p)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} p f(0) - p^2 F_s(p)$$