UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1987/88

MAT402 - Analisis Nyata

Tarikh: 5 November 1987

Masa: 9.00 pagi. - 12.00 t/hari.
(3 jam)

Bahagian 1

Jawab semua soalan.

1. Takrifkan yang berikut:

   (i) set terbilangkan,

   (ii) ruang metrik,

   (iii) titik pedalaman set E,

   (iv) titik had set E,

   (v) set terbuka,

   (vi) set tertutup,

   (vii) set padat,

   (viii) jujukan Cauchy di dalam ruang metrik (X, j),

   (ix) fungsi selanjar pada set D ke ruang metrik Y di mana D subset ruang metrik X, dan

   (x) fungsi selanjar secara seragam pada set D ke ruang metrik Y.

(100/100)

2. Nyatakan

   (i) ketaksamaan Schwarz,

   (ii) ketaksamaan Minkowski,

   (iii) teorem Bolzano-Weierstrass,

(iv) teorem Heine-Borel, dan

(v) teorem pemetaan kecutan.

(100/100)

3. Buktikan atau berikan contoh penyangkal kepada pernyataan-pernyataan yang berikut:

(i) Andaikan J melambangkan set yang mengandungi setiap integer positif dan $f : J \to A$ fungsi satu-satu. Maka set A terbilangkan.

(ii) Jika set G tidak terbuka, maka G tertutup.

(iii) Titik pedalaman set E adalah juga titik had E.

(iv) Jika $\{G_\alpha\}$ merupakan kutipan set-set terbuka, maka $\bigcap_\alpha G_\alpha$ terbuka.

(v) Andaikan $E \subset Y$ dan $Y \subset X$. Jika E terbuka di dalam Y, maka E juga terbuka di dalam X.

(vi) Jika set K padat dan set F tertutup, maka $F \cap K$ adalah padat.

(vii) Jika set F terbatas dan tertutup di dalam ruang metrik X, maka F padat.

(viii) Jika $\{K_\alpha\}$ merupakan kutipan set-set yang memenuhi sifat persilangan terhingga, maka $\bigcap_\alpha K_\alpha$ bukan set kosong.

(ix) Jika $f_n : D \to Y$ fungsi selanjar bagi setiap integer positif n, dan $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ bagi setiap x di dalam D, maka f fungsi selanjar pada D.

(100/100)

4. Buktikan bahawa bagi sebarang dua nombor nyata, wujud suatu nombor nisbah yang terletak di antara nombor-nombor tersebut.

(100/100)

5. Buktikan bahawa jika D set padat dan $f : D \to R$ fungsi selanjar, maka wujud titik-titik x_o dan x_1 di dalam D supaya
$f(x_o) \leq f(x) \leq f(x_1)$ bagi setiap x di dalam D.

(100/100)

Bahagian 2

Jawab mana-mana <u>DUA</u> (2) soalan dalam bahagian ini.

6. (a) Buktikan bahawa setiap subset tertutup set padat adalah padat.

   (b) Jika $\{K_n\}$ merupakan kutipan set-set padat, $K_n \neq \phi$ dan $K_{n+1} \subset K_n$ bagi setiap n, n = 1, 2, ..., dan $\lim\limits_{n\to\infty} \text{diam } K_n = 0$, maka tunjukkan bahawa $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ mempunyai hanya satu unsur.

(100/100)

7. (a) Buktikan bahawa setiap set tak terhingga mempunyai subset yang tak terhingga secara terbilangkan.

   (b) Jika E subset tak terhingga set padat K, maka tunjukkan bahawa $E' \cap K \neq \phi$.

(100/100)

8. (a) Buktikan bahawa $\bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$ adalah terbuka jika G_α terbuka bagi setiap α.

   (b) Buktikan bahawa $\bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$ adalah tertutup jika F_α tertutup bagi setiap α.

   (c) Buktikan bahawa set E tertutup jika dan hanya jika bagi setiap jujukan $\{x_n\} \subset E$ dan $\{x_n\}$ menumpu ke x mengimplikasikan bahawa $x \in E$.

(100/100)

9. (a) Jika $f : D \to Y$ fungsi selanjar dan D set padat di dalam X, tunjukkan bahawa $f(D)$ padat.

(b) Jika $f : D \to R$ selanjar, buktikan bahawa bagi setiap nombor c,

(i) set $\{x \in D : f(x) > c\}$ terbuka di dalam D, dan

(ii) set $\{x \in D : f(x) = c\}$ tertutup di dalam D.

(100/100)

10. (a) Jika $x \in E'$, tunjukkan bahawa E mempunyai subset S yang tak terhingga secara terbilangkan supaya $S' = \{x\}$.

(b) Buktikan bahawa jika K padat di dalam X dan $x \in X$, maka wujud titik $y_o \in K$ supaya $j(x, y_o) = \inf_{y \in K} j(x, y)$.

(100/100)

- oooOOooo -