UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1996/97

April 1997

MAT 413 - Aljabar Moden II

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam EMPAT halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Cari suatu asas ruang lajur matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(25/100)

(b) Tentukan kesandaran

$$\left\{ 3\underset{\sim}{v}_1+\underset{\sim}{v}_2-\underset{\sim}{v}_3,\ 2\underset{\sim}{v}_1-\underset{\sim}{v}_2+\underset{\sim}{v}_3+\underset{\sim}{v}_4,\ 5\underset{\sim}{v}_1-2\underset{\sim}{v}_2+\underset{\sim}{v}_3+2\underset{\sim}{v}_4 \right\}$$

jika $\left\{\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2, \underset{\sim}{v}_3, \underset{\sim}{v}_4\right\}$ tak bersandar secara linear.

(25/100)

(c) Jika $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \cdots, \underset{\sim}{x}_m$ tak bersandar secara linear, buktikan $\underset{\sim}{y}_1, \underset{\sim}{y}_2, \cdots, \underset{\sim}{y}_m$ yang mana

$$\underset{\sim}{y}_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\, x_j$$

adalah tak bersandar secara linear jika dan hanya jika $A = [\alpha_{ij}]$ tak singular.

(25/100)

(d) Katakan $B = \{\underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2, \cdots, \underset{\sim}{u}_n\}$ suatu asas tertib suatu ruang vektor υ. Jika $\underset{\sim}{v} = \sum_{i=1}^{n} r_i u_i$, $r_1 \neq 0$, tunjukkan $B' = \{\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{u}_2, \underset{\sim}{u}_3, \cdots, \underset{\sim}{u}_n\}$ juga suatu asas υ. Andaikan $\left[\underset{\sim}{u}\right]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, dapatkan $\left[\underset{\sim}{u}\right]_{B'}$.

(25/100)

2. (a) Andaikan $B = \{2t^2+t,\ t^2+3,\ t\}$ dan $B' = \{t+1,\ t^2-2,\ t+3\}$ dua asas tertib $P_2(t)$, set polinomial darjah 2 atau kurang. Katakan $f_1(t) = 8t^2 - t + 6$ dan $f_2(t) = t^2 - 7t + 6$.

   (i) Cari koordinat vektor $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ terhadap asas B.
   (ii) Dapatkan matriks peralihan dari B ke B'
   (iii) Dapatkan koordinat vektor $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ terhadap asas B'.

(30/100)

(b) Buktikan, untuk sebarang matriks $A = \left[\alpha_{ij}\right]_{m\times n}$ dengan ruang lajur μ dan ruang nol N,

$$\dim \mu + \dim N = n.$$

(35/100)

(c) Katakan E_1, E_2, E_3 sebagai asas piawai R^3, dan F_1, F_2 asas piawai R^2. Katakan $T_1 : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2$ ditakrifkan oleh

$$T_1(E_1) = F_2, \quad T_1(E_2) = F_1 \quad \text{dan} \quad T_1(E_3) = F_1 + F_2 .$$

$T_2 : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$ ditakrifkan oleh

$$T_2(F_1) = [1,\ 2,\ 3] \text{ dan } T_2(F_2) = [2,\ -1,\ 4]$$

   (i) Cari $(T_2T_1)(E_1)$, $(T_2T_1)(E_2)$ dan $(T_2T_1)(E_3)$.
   (ii) Tulis matriks $A_{T_2T_1}$ untuk $T_2T_1 : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ berkait dengan asas E. Tentusahkan $A_{T_2T_1} = A_{T_2} A_{T_1}$.

(35/100)

3. (a) Katakan $\{u_1 - w, u_2 - w, \cdots, u_n - w\}$ adalah tidak bersandar secara linear dan $\alpha_i, \beta_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$ adalah pemalar sedemikian,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

Jika $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$, tunjukkan $\alpha_i = \beta_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$.

(35/100)

(b) Jika $\theta : \upsilon \to \omega$ suatu isomorfism di antara ruang vektor υ dengan ω, tunjukkan $\theta v_1, \theta v_2, \cdots, \theta v_r$ adalah tak bersandar secara linear dalam ω jika dan hanya jika $v_1, v_2, \cdots, v_r$ tak bersandar secara linear dalam υ.

(30/100)

(c) (i) Katakan, $A = [\alpha_{ij}]_{n\times n}$, $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{jika } i + j \neq n+1 \\ 1 & \text{jika } i + j = n+1 \end{cases}$. Cari det (A).

(ii) Cari persamaan lengkung

$$8x^2 - 10xy - 3y^2 = 12$$

relatif kepada sistem koordinat dengan asas

$$F_1 = \left[\frac{1}{14}, -\frac{2}{7}\right], \quad F_2 = \left[\frac{3}{14}, \frac{1}{7}\right]$$

(35/100)

4. (a) (i) Katakan $S = \left\{\underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2, \cdots, \underset{\sim}{u}_n\right\}$ sebagai suatu asas tertib untuk ruang vektor υ. Andaikan $C_{ij} = \underset{\sim}{u}_i . \underset{\sim}{u}_j$ dan $C = [c_{ij}]$, tunjukkan C adalah suatu matriks simetri.

(ii) Suatu matriks $P = \left[E_{j_1}, E_{j_2}, \cdots, E_{j_n}\right]$ $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ suatu pilihaturan $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ disebut suatu matriks pilihaturan. Tunjukkan $PP^T = I_n$.

(35/100)

...4/-

(b) Katakan $B = \{\underset{\sim}{v}_1, \cdots, \underset{\sim}{v}_n\}$ suatu asas tertib υ. Suatu pemetaan $T: \upsilon \to \upsilon$ ditakrifkan oleh

$$T\left(\underset{\sim}{v}\right) = \lambda_1 \underset{\sim}{v}_2 + \lambda_2 \underset{\sim}{v}_3 + \cdots + \lambda_{n-1} \underset{\sim}{v}_n ;$$

$$\left[\underset{\sim}{v}\right]_B = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

(i) Tunjukkan T adalah suatu transformasi linear.

(ii) Cari $T\left(\underset{\sim}{v}_i\right)$ $i = 1, 2, \cdots, n$.

(iii) Cari A_T berkait dengan asas B.

(iv) Tunjukkan $T^n\left(\underset{\sim}{v}\right) = \underset{\sim}{0}, \ \forall \underset{\sim}{v} \in \upsilon$.

(35/100)

(c) Katakan $T: P_3(t) \to \mathrm{R}^3$ ditakrifkan oleh

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b - d, \ a + c + 2d, \ a + b + c + d)$$

(i) Tunjukkan T adalah suatu transformasi linear

(ii) Cari pangkat T.

(30/100)

-oooOooo-