UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 1999/2000

April 2000

MAT 363 – Pentaabiran Statistik

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam TIGA halaman dan SATU halaman lampiran yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Andaikan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sampel rawak daripada taburan $N(0,1)$. Cari taburan setiap statistik berikut:

(i) $\sum_{i=1}^{n} X_i$ (ii) $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

(iii) $\overline{X}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i \quad , \quad k < n$ (iv) $\frac{k\overline{X}_k^2}{X_n^2}$ (v) $\frac{\sqrt{k}\, X_n}{\sqrt{\sum_1^k X_i^2}}$

(50/100)

(b) Biarkan $\{X_n\}$ menandai jujukan pembolehubah rawak yang mempunyai fungsi taburan F_n dan fungsi ketumpatan f_n. Cari taburan penghad X_n, sekiranya wujud, apabila

(i) $X_n \sim N\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$ (ii) $F_n(x) = \left[1 - \left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)^n\right] I_{[0,n\theta)}(x)$

(20/100)

(c) Biarkan $\overline{X}_n$ dan S_n^2 masing-masingnya menandai min sampel dan varians sampel bagi sampel rawak saiz n daripada taburan $N(\mu, \sigma^2)$. Adalah diketahui bahawa $S_n^2 \sim G\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2\sigma^2}\right)$.

(i) Cari min dan varians S_n^2 dan kemudian tunjukkan bahawa $S_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$ dengan mengaplikasikan ketaksamaan Chebyshev terhadap S_n^2.

(ii) Dengan menggunakan teorem-teorem tentang penumpuan, tunjukkan bahawa pembolehubah rawak $T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{S_n} \xrightarrow{D} N(0,1)$.

(30/100)

...2/-

2. (a) Andaikan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sampel rawak daripada taburan $U(\mu - \sqrt{3}\sigma, \mu + \sqrt{3}\sigma)$. Cari penganggar kaedah momen bagi μ dan σ.

(20/100)

(b) Biarkan $\overline{X}$ dan S^2 masing-masingnya menandakan min dan varians bagi sampel rawak saiz n daripada taburan $Po(\lambda)$.

(i) Tunjukkan bahawa $T = a\overline{X} + (1-a)S^2$, $0 < a < 1$, ialah penganggar saksama λ.

(ii) Jika σ_1^2 dan σ_2^2 masing-masingnya menandakan varians $\overline{X}$ dan S^2, cari nilai a yang akan meminimumkan var(T).

(30/100)

(c) Cari statistik cukup dan lengkap bagi setiap taburan berikut:

(i) $f(x;\theta) = e^{-\theta}\dfrac{\theta^x}{x!} I_{\{0,1,2,\cdots\}}(x)$; $\theta > 0$.

(ii) $f(x;\theta) = 2\theta\, x\, e^{-\theta x^2} I_{(0,\infty)}(x)$; $\theta > 0$.

(iii) $f(x;\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-(x-1)^2/2\theta} I_{(-\infty,\infty)}(x)$; $\theta > 0$.

(30/100)

(d) Andaikan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sampel rawak daripada taburan $G(2,\theta)$ yang mempunyai fungsi ketumpatan

$$f(x;\theta) = \theta^2 x e^{-x\theta} I_{(0,\infty)}(x) \ ; \ \theta > 0.$$

Cari PSVMS bagi $1/\theta$ dan tunjukkan bahawa ia penganggar cekap $1/\theta$.

(20/100)

3. (a) Andaikan $X_1, X_2, \cdots, X_{25}$ sampel rawak saiz 25 daripada $N(0,\theta)$; $\theta > 0$.

(i) Cari penganggar kebolehjadian maksmum bagi θ.

(ii) Jika $\left(\sum X_i^2/b, \sum X_i^2/a\right)$ ialah selang keyakinan 95% bagi θ, cari nilai a dan b.

(50/100)

(b) Pertimbangkan sampel rawak daripada taburan yang mempunyai fungsi ketumpatan

$$f(x;\theta) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(0,\theta)}(x) \ ; \ \theta > 0.$$

...3/-

Takrifkan $Y_n = \text{maks}\,(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

(i) Terbitkan selang keyakinan 100γ peratus bagi θ berasaskan kuantiti pangsian $\frac{Y_n}{\theta}$.

(ii) Terbitkan selang keyakinan hampiran 100γ peratus bagi θ dengan menggunakan THM.

(50/100)

4. (a) Andaikan $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ sampel rawak saiz 10 daripada taburan $N(0,\theta)$, $\theta > 0$. Bagi menguji $H_0 : \theta = 1$ lawan $H_1 : \theta > 1$, rantau genting berikut digunakan:

$$C = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_{10}) \; : \; \sum_{i=1}^{10} x_i^2 \geq c \right\}.$$

Cari nilai c jika saiz rantau genting c ialah 0.05.

(20/100)

(b) Biarkan X menandai pembolehubah rawak yang mempunyai fungsi ketumpatan

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \, I_{(0,\infty)}(x) \; ; \; \theta > 0.$$

(i) Cari rantua genting paling berkuasa bagi menguji $H_0 : \theta = 2$ lawan $H_1 : \theta = 4$ berasaskan sampel rawak saiz 2.

(ii) Cari saiz ujian paling berkuasa ini.

(40/100)

(c) Andaikan X cerapan tunggal daripada taburan yang mempunyai fungsi ketumpatan

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta - 1} \, I_{(0,1)}(x) \; ; \; \theta > 0.$$

(i) Bagi menguji $H_0 : \theta \leq 1$ lawan $H_1 : \theta > 1$, ujian berikut digunakan:
Tolak H_0 jika dan hanya jika $X \geq \frac{1}{2}$. Cari fungsi kuasa dan saiz ujian tersebut.

(ii) Cari ujian PBS saiz-α bagi menguji $H_0 : \theta = 2$ lawan $H_1 : \theta < 2$.

(40/100)

- oooOooo -

Lampiran 1

Taburan	Fungsi Ketumpatan	Min	Varians	Fungsi Penjana Momen
Seragam Diskrit	$f(x)=\frac{1}{N} I_{\{1,2,\cdots,N\}}(x)$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} e^{jt}$
Bernoulli	$f(x)=p^x q^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$	p	pq	$q+pe^t$
Binomial	$f(x)=\binom{n}{x} p^x q^{n-x} I_{\{0,1,\cdots,n\}}(x)$	np	npq	$(q+pe^t)^n$
Geometri	$f(x)=pq^x I_{\{0,1,\cdots\}}(x)$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{p}{1-qe^t}$, $qe^t<1$
Poisson	$f(x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} I_{\{0,1,\cdots\}}(x)$	λ	λ	$exp\{\lambda(e^t-1)\}$
Seragam	$f(x)=\frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$, $t\neq 0$
Normal	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\} I_{(-\infty,\infty)}(x)$	μ	σ^2	$exp\{\mu t+(\sigma t)^2/2\}$
Eksponen	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$, $t<\lambda$
Gama	$f(x)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1} I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha$, $t<\lambda$
Khi Kuasa Dua	$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{r/2}\frac{1}{\Gamma(r/2)} e^{-x/2} x^{(r/2)-1} I_{(0,\infty)}(x)$	r	$2r$	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{r/2}$, $t<\frac{1}{2}$
Beta	$f(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)}(x)$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$	

KSA - 4/6/99

- oooOooo -