UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1996/97

Oktober/November 1996

MAT 362 - Teori Kebarangkalian

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam LIMA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) (*Soalan Objektif*). Tuliskan pilihan jawapan anda sahaja.

   (i) Jika $P(A) = 0.4$ dan $P(B) = 0.65$, maka ketaksamaan manakah yang berikut adalah benar?

   I. $P(A \cap B) \leq 0.4$

   II. $P(A \cap B) \geq 0.3$

   III. $P(A \cap B) \geq 0.5$

   (A) I sahaja (B) I dan II sahaja

   (C) I dan III sahaja (D) II dan III sahaja

   (E) Tiada satu pun dari di atas

   (ii) Jika $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$, $P(C) = 0.2$ dan $P(A \cup B \cup C) = 1.0$, kenyataan manakah yang berikut adalah benar?

   I. A, B dan C adalah saling tak bersandar
   II. A, B dan C adalah tak bersandar pasangan demi pasangan
   III. A, B dan C adalah saling ekslusif.

   (A) I sahaja (B) II sahaja

   (C) I dan II sahaja (D) I, II dan III

   (E) Tiada satu pun dari di atas

(20/100)

...2/-

(b) (i) Sebuah mangkuk mengandungi 9 biji guli putih dan 3 biji guli hitam. Kita akan mengambil keluar guli-guli tersebut sehinggalah guli hitam terpilih. Katakan X ialah bilangan kali cubaan yang dilakukan. Kita dikatakan 'menang' jika $X \leq 2$. Patutkah kita mensampel dengan pengembalian atau tanpa pengembalian? Huraikan untuk menyokong jawapan anda.

(15/100)

(ii) Sebuah kotak mengandungi 20 biji bola. R daripadanya adalah merah dan $20 - R$ adalah putih. R tidak diketahui, tetapi dipercayai bahawa R adalah mempunyai kemungkinan yang sama iaitu 5 atau 10 (yakni $P(R=5) = P(R=10) = ½$). Bola-bola ini diambil tanpa pengembalian sehingga bola merah diperolehi. Katakan X ialah bilangan cubaan yang dilakukan sebelum bola merah diperolehi buat pertama kali. Jika kita jalankan ujikaji ini dan didapati bahawa $X = 2$, kira kebarangkalian bahawa $R = 10$ diketahui $X = 2$.

(20/100)

(c) Katakan suatu pembolehubah rawak X mempunyai fungsi ketumpatan kebarangkalian

$$f(x) = \frac{1}{2^{|x|+1}} \quad ; \quad x = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \cdots$$

Cari $E\left[\sum_{n=1}^{6} nX^{2n-1}\right]$

(15/100)

(d) Suatu pembolehubah rawak X mempunyai fungsi taburan berikut:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ 1/5 & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ 3/5 & ; \quad 1 \leq x < 3 \\ 4/5 & ; \quad 3 \leq x < 5 \\ 1 & ; \quad 5 \leq x \end{cases}$$

(i) Dapatkan fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi X.

(ii) Hitungkan $P(X \leq 1)$ dan $E(|X|)$.

(iii) Dapatkan fungsi penjana momen bagi X.

(30/100)

...3/-

2. (a) Andaikan bahawa bilangan kesalahan menaip pada suatu muka surat sebuah buku adalah mengikut proses Poisson dengan $\lambda = ½$ permuka surat.

   (i) Apakah kebarangkalian bahawa suatu muka surat tidak mempunyai sebarang kesalahan?

   (ii) Apakah kebarangkalian bahawa muka surat pertama yang didapati mempunyai kesalahan adalah pada muka surat ke lima?

   (iii) Jika 10 muka surat disampel (dengan pengembalian), berapakah bilangan muka surat yang dijangka tiada kesalahan?

(30/100)

(b) Katakan $$f(x,y)=\begin{cases} 15x^2y & ; \quad 0<x<y<1 \\ 0 & , \quad \text{d.t.l} \end{cases}$$

adalah f.k.k. tercantum bagi X dan Y.

   (i) Cari $E[X|y]$

   (ii) Cari Var (X) dan Var (Y)

   (iii) Dari (i) dan (ii) dapatkan nilai bagi $\rho = \text{korr}(X,Y)$

(40/100)

(c) (i) Nyatakan ketaksamaan Chebyshev dan terangkan kegunaannnya

   (ii) Jika X ialah suatu pembolehubah rawak dengan $E(X) = 3$ dan $E(X^2)=13$, gunakan ketaksamaan Chebyshev untuk mendapatkan $P(-2< X <8)$.

(30/100)

3. (a) (i) Katakan $\overline{X}$ adalah min sampel bagi suatu sampel rawak bersaiz 3 dari taburan seragam $U(0, 1)$. Gunakan Teorem Had Memusat untuk mengira $P(\frac{2}{3}< \overline{X} <\frac{5}{6})$.

   (ii) Biar $Y \sim \text{Bin}\left(16,\frac{1}{2}\right)$. Dapatkan $P(9<Y<13)$ dengan menggunakan Teorem Had Memusat.

(30/100)

...4/-

(b) Andaikan X dan Y adalah pembolehubah rawak tak bersandar dengan taburan gama $\Gamma(3,2)$ dan $\Gamma(4,2)$, masing-masing.

(i) Cari $E[2X+3Y+1]$ dan $\text{Var}\,[2X+3Y+1]$

(ii) Apakah taburan bagi $Z = X + Y$?

(30/100)

(c) Katakan $X_1, \cdots, X_4$ dan $Y_1, \cdots, Y_9$ adalah sampel-sampel rawak dari taburan normal yang tak bersandar, $N(2, 4)$ dan $N(2, 27)$, masing-masing.

Ditakrifkan

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{4} X_i}{4} \quad , \quad \overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{9} Y_i}{9} \quad \text{dan} \quad S^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{3}.$$

(i) Kirakan $P\left(\overline{X} \geq \overline{Y} + 1\right)$

(ii) Cari pemalar C supaya $P\left(\frac{\overline{X}-2}{S} < C\right) = 0.95$

(iii) Cari pemalar C supaya $P(S > C) = 0.95$

(40/100)

4\. (a) Andaikan X_1, X_2 dan X_3 adalah suatu sampel rawak bersaiz $n = 3$ dari suatu taburan dengan f.k.k.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & ; \quad x = 1 \\ \frac{3}{4} & ; \quad x = 2 \end{cases}$$

(i) Dapatkan f.k.k. bagi min sampel

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

(ii) Dapatkan f.k.k. bagi varians sampel

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{3}\left(X_i - \overline{X}\right)}{2}$$

(30/100)

...5/-

(b) Andaikan X_1, X_2 adalah 2 cerapan rawak dari suatu taburan $N(\mu,\sigma^2)$. Katakan $Y_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2$ dan $Y_2 = b_1 X_1 + b_2 X_2$ adalah sebarang 2 fungsi linear bagi X_1, X_2.

(i) Apakah taburan tercantum bagi Y_1 dan Y_2?

(ii) Apakah syarat yang dipelukan supaya Y_1 dan Y_2 adalah tak bersandar.

(40/100)

(c) Andaikan

(i) X_1 mempunyai f.k.k. $f_1(x_1) = \begin{cases} x_1{}^2 e^{-\frac{x_1}{2}} & ; \quad 0 < x_1 < \infty \\ 0 & ; \quad \text{d.t.l.} \end{cases}$

(ii) X_2 mempunyai f.k.k. $f_2(x_2) = \begin{cases} x_2 e^{-x_2/2} & ; \quad 0 < x_2 < \infty \\ 0 & ; \quad \text{d.t.l.} \end{cases}$

(iii) X_1 dan X_2 adalah tak bersandar.

Buktikan bahawa $Y_1 = X_1 + X_2$ dan $Y_2 = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$ adalah tak bersandar.

(30/100)

- oooOooo -