

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1995/96

Mac/April 1996

MAT 361 - Pentaabiran Statistik

Masa: [3 jam]

Jawab LIMA soalan sahaja.

1. (a) Satu sampel n cerapan tak bersandar telah diambil terhadap pembolehubah rawak X yang mempunyai taburan siri logaritma

$$P(X = x) = \frac{-\theta^x}{x \log(1 - \theta)}, \quad x = 1, 2, \dots$$

di mana θ parameter anu dalam julat $(0, 1)$. Tunjukkan anggaran kebolehdjian maksimum $\hat{\theta}$ bagi θ memenuhi persamaan

$$\hat{\theta} + \bar{x}(1 - \hat{\theta}) \log(1 - \hat{\theta}) = 0$$

di mana \bar{x} ialah min sampel, dan dapatkan taburan asimptot bagi $\hat{\theta}$.

[55/100]

- (b) Jika X_1, X_2, \dots, X_n satu sampel rawak daripada $U[0, \theta]$, cari fungsi ketumpatan kebarangkalian $X_{(n)}$, nilai yang terbesar antara X_i itu. Tunjukkan $2\bar{X}$ dan $(n+1)\frac{X_{(n)}}{n}$ kedua-duanya penganggar konsisten bagi θ dan bandingkan varians mereka.

[45/100]

2. (a) Pembolehubah rawak X dan Y mempunyai fungsi ketumpatan kebarangkalian

$$f(x, y) = \begin{cases} 24y(1 - x - y), & x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 \\ 0, & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

- (i) Dapatkan taburan tercantum $U = X + Y$ dan $V = X/Y$ dan deduksikan U dan V tak bersandar.
- (ii) Cari taburan bersyarat bagi Y diberi $U = a$, di mana $0 < a < 1$.

[55/100]

...2/-

(b) Fungsi ketumpatan pembolehubah rawak gamma X ialah

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x \geq 0$$

Tunjukkan fungsi penjana momen X ialah $M_x(t) = (1 - t/\lambda)^{-\alpha}$ untuk $t < \lambda$, dan momen ke- r bagi X ialah $\mu'_r = \Gamma(\alpha + r) / \{\lambda^r \Gamma(\alpha)\}$.

[45/100]

3. (i) Apakah penganggar saksama varians minimum? Untuk taburan Poisson dengan parameter λ tunjukkan penganggar lazim yang digunakan bagi λ sebenarnya adalah penganggar saksama varians minimum bagi λ .

[40/100]

(ii) Apakah yang dimaksudkan dengan "Penganggaran Kebolehjadian Maksimum"? Apakah ciri-ciri penganggar sampel besar bagi kaedah ini? Ada N ekor ikan dalam suatu tasik, dan R darinya ditangkap secara rawak, ditandakan, dan dilepaskan semula ke dalam tasik itu. Kemudian, satu sampel n ekor ikan ditangkap secara rawak dari tasik itu, dan dari kalangan ikan itu, r darinya didapati bertanda. Cari penganggar kebolehjadian maksimum bagi N .

[60/100]

4. (i) Andaikan X_1, X_2, \dots, X_n membentuk satu sampel rawak daripada taburan dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian

$$f(x|\theta) = \exp \{A(\theta)B(x) + C(x) + D(\theta)\}.$$

Tunjukkan pengujian terbaik $H_0 : \theta = \theta_0$ melawan $H_1 : \theta = \theta_1$ mempunyai rantau genting bentuknya

$$\{A(\theta_1) - A(\theta_0)\} \sum_{i=1}^n B(x_i) > a$$

untuk sesetengah pemalar a .

[55/100]

...3/-

- (ii) Gunakan keputusan dalam 4(i) untuk mencari bentuk ujian terbaik H_0 melawan H_1 apabila taburan X_1, X_2, \dots, X_n ialah
 - (a) Poisson dengan parameter θ
 - (b) Normal dengan min sifar dan varians θ .

[45/100]

5. (a) Bincangkan konsep selang keyakinan. Tunjukkan dengan jelas bagaimana selang-selang keyakinan dibina di mana sampel rawak tersedia daripada taburan $N(\mu, \sigma^2)$ bagi situasi berikut:
- (i) untuk μ bila σ^2 diketahui
 - (ii) untuk σ^2 bila μ tak diketahui

[45/100]

- (b) Terangkan ungkapan set statistik cukup minimum dan cari set sedemikian untuk situasi di mana sampel-sampel tak bersandar n tersedia daripada populasi dengan ketumpatan-ketumpatan yang diberi di bawah:

(i)
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\}, \quad -\infty < \mu, \quad x < \infty$$

$$\sigma > 0$$

(ii)
$$\frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$$

[55/100]

6. (i) Terangkan Lemma Asasi Neyman-Pearson untuk mencari pengujian hipotesis yang paling berkuasa $H_0 : \theta = \theta_0$ melawan alternatif mudah $H_1 : \theta = \theta_1$ di mana X_1, \dots, X_n ialah sampel rawak saiz n daripada taburan dengan ketumpatan $f(x, \theta), \theta \in \Theta$.

[45/100]

...4/-

- (ii) Satu sampel saiz n daripada taburan $N(0, \sigma^2)$ tersedia dan mahu menguji hipotesis $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ melawan $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 (\sigma_1^2 > \sigma_0^2)$. Cari bentuk ujian menggunakan Lemma Asasi Neyman-Pearson. Cari ujian sebenar jika kita ada $\sigma_0 = 3, \sigma_1 = 7$ dan perlukan $\alpha = \beta = 0.01$ seberapa jitu yang mungkin yang dibenarkan oleh sifir anda, di mana α dan β masing-masing menandakan dalam tatatanda biasa, kebarangkalian kedua-dua jenis ralat.

[55/100]

- 7. (i) Terangkan prinsip kuasa dua terkecil dalam model linear.
- (ii) Cerapan-cerapan $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ tersedia hasil daripada suatu eksperimen di mana dianggapkan modelnya ialah

$$y_i = \beta x_i + e_i$$

e_i ralat-ralat tak bersandar, tertabur secara seragam dengan min sifar dan varians σ^2 .

- (a) Carikan $\hat{\beta}$, penganggar kuasa dua terkecil bagi β , dan tunjukkan ianya saksama untuk β dengan varians $\sigma^2 / \sum x_i^2$.
- (b) Cari juga nilai jangkaan $S = \sum (y_i - \hat{\beta} x_i)^2$, dan yang demikian cadangkan bagaimana anda akan menganggar varians $\hat{\beta}$.

[100/100]

- ooo0ooo -

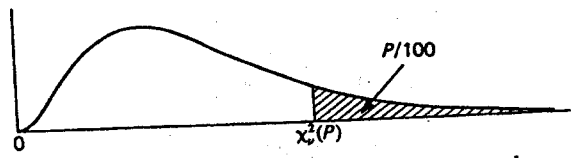
TABLE 8. PERCENTAGE POINTS OF THE χ^2 -DISTRIBUTION

This table gives percentage points $\chi^2(P)$ defined by the equation

$$\frac{P}{100} = \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \int_{\chi^2(P)}^{\infty} x^{\nu/2-1} e^{-x/2} dx.$$

If X is a variable distributed as χ^2 with ν degrees of freedom, $P/100$ is the probability that $X \geq \chi^2(P)$.

For $\nu > 100$, $\sqrt{2X}$ is approximately normally distributed with mean $\sqrt{2\nu-1}$ and unit variance.



(The above shape applies for $\nu \geq 3$ only. When $\nu < 3$ the mode is at the origin.)

P	50	40	30	20	10	5	2.5	1	0.5	0.1	0.05
1	0.4549	0.7083	1.074	1.642	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.83	12.12
2	1.386	1.833	2.408	3.219	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60	13.82	15.20
3	2.366	2.946	3.665	4.642	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84	16.27	17.73
4	3.357	4.045	4.878	5.989	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86	18.47	20.00
5	4.351	5.132	6.064	7.289	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52	22.11
6	5.348	6.211	7.231	8.558	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46	24.10
7	6.346	7.283	8.383	9.803	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32	26.02
8	7.344	8.351	9.524	11.03	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12	27.87
9	8.343	9.414	10.66	12.24	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88	29.67
10	9.342	10.47	11.78	13.44	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59	31.42
11	10.34	11.53	12.90	14.63	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26	33.14
12	11.34	12.58	14.01	15.81	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91	34.82
13	12.34	13.64	15.12	16.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53	36.48
14	13.34	14.69	16.22	18.15	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12	38.11
15	14.34	15.73	17.32	19.31	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70	39.72
16	15.34	16.78	18.42	20.47	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25	41.31
17	16.34	17.82	19.51	21.61	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79	42.88
18	17.34	18.87	20.60	22.76	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31	44.43
19	18.34	19.91	21.69	23.90	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82	45.97
20	19.34	20.95	22.77	25.04	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31	47.50
21	20.34	21.99	23.86	26.17	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80	49.01
22	21.34	23.03	24.94	27.30	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27	50.51
23	22.34	24.07	26.02	28.43	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73	52.00
24	23.34	25.11	27.10	29.55	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18	53.48
25	24.34	26.14	28.17	30.68	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62	54.95
26	25.34	27.18	29.25	31.79	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05	56.41
27	26.34	28.21	30.32	32.91	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48	57.86
28	27.34	29.25	31.39	34.03	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89	59.30
29	28.34	30.28	32.46	35.14	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30	60.73
30	29.34	31.32	33.53	36.25	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70	62.16
32	31.34	33.38	35.66	38.47	42.58	46.19	49.48	53.49	56.33	62.49	65.00
34	33.34	35.44	37.80	40.68	44.90	48.60	51.97	56.06	58.96	65.25	67.80
36	35.34	37.50	39.92	42.88	47.21	51.00	54.44	58.62	61.58	67.99	70.59
38	37.34	39.56	42.05	45.08	49.51	53.38	56.90	61.16	64.18	70.70	73.35
40	39.34	41.62	44.16	47.27	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40	76.09
50	49.33	51.89	54.72	58.16	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66	89.56
60	59.33	62.13	65.23	68.97	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61	102.7
70	69.33	72.36	75.69	79.71	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2	112.3	115.6
80	79.33	82.57	86.12	90.41	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3	124.8	128.3
90	89.33	92.76	96.52	101.1	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	137.2	140.8
100	99.33	102.9	106.9	111.7	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	149.4	153.2